ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 23 | Juni 1943 | Heft 3

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Zur Theorie des stationären Verdichtungsstoßes.

Von *Feodor Schubert.*

Aus den dimensionslos gemachten Grundgleichungen werden einige für die Berechnung von Verdichtungsstößen wichtige Verhältnisgrößen hergeleitet. Die sich dabei ergebende einfache Abhängigkeit von den Stoßbedingungen erlaubt es, den allgemeinen stationären Verdichtungsstoß im wesentlichen wie einen ihm äquivalenten geraden zu behandeln und die Änderungen der Zustandsgrößen in leicht zu erzeugenden Diagrammen darzustellen.

1. Einleitung.

In Gasströmungen mit Überschallgeschwindigkeit können Verdichtungsstöße auftreten, die von B. Riemann 1860 theoretisch vorausgesagt wurden. Beim Durchgang der Strömung durch die Front eines solchen Verdichtungsstoßes erleiden Geschwindigkeit, Druck, Dichte, Temperatur und Entropie einen Sprung, während die Energie konstant bleibt. Es ist das Verdienst von Hugoniot, 1887 diese Verhältnisse im einfachsten Falle des stationären geraden Verdichtungsstoßes einwandfrei aufgeklärt zu haben. Beim geraden Verdichtungsstoß erfährt die Geschwindigkeit keinen Richtungswechsel, während die Stoßfront auf der Geschwindigkeit senkrecht steht. Für den allgemeineren Fall des schiefen Verdichtungsstoßes hat Th. Meyer[1]) 1907 die Theorie entwickelt. Eine sehr anschauliche graphische Darstellung hat A. Busemann[2]) 1929 durch die Einführung der Stoßpolaren erzielt. Eine solche Stoßpolare beschreibt jeweils für eine bestimmte Machsche Zahl der Anströmung vollständig die Kinematik der Strömung beim Durchgang durch die Stoßfront. Für die dynamischen Verhältnisse, z. B. den Druck- und Entropiesprung, sind zusätzliche Diagramme notwendig, die auch von Busemann angegeben wurden. Wenn es nun gilt, die Stoßfront bei der Umströmung eines Körpers aufzubauen, was rechnerisch auf eine Kombination der Verdichtungsstoßgleichungen mit den charakteristischen Differentialgleichungen der Überschallströmungen hinausläuft, so erweisen sich diese graphischen Hilfsmittel als nicht genau genug und in der Handhabung mühsam. Deshalb sieht man sich genötigt, eine für die Rechenpraxis zweckmäßige und möglichst einfache Darstellung der Verdichtungsstoßtheorie zu entwickeln. Eine solche wird im folgenden hergeleitet, wobei die Zusammenhänge aller physikalisch bedeutsamen Größen an der Stoßfront durch Vermittlung eines Parameters wiedergegeben werden. Es zeigt sich dabei, daß der schiefe Verdichtungsstoß in weitem Maße auf den geraden Verdichtungsstoß zurückgeführt werden kann.

[1]) Th. Meyer: Über zweidimensionale Bewegungsvorgänge in einem Gas, das mit Überschallgeschwindigkeit strömt. Forsch.-Arb. Ing.-Wes., Heft 62, Berlin 1908.

[2]) A. Busemann: Artikel „Gasdynamik" im Handbuch der Experimentalphysik, Bd. 4, 1. Teil, Leipzig 1931.

2. Bezeichnungen.

Mit p werde der Druck bezeichnet, mit ϱ die Dichte, mit T die Temperatur, mit w die Geschwindigkeit, mit a die Schallgeschwindigkeit; k sei das Verhältnis der spezifischen Wärmen. Die Größen unmittelbar vor dem Stoß sollen den Index 1 tragen, die hinter dem Stoß den Index 2. Durch das betrachtete Flächenelement der Stoßfront wird diejenige Normalebene gelegt, die den Vektor der Anströmgeschwindigkeit w_1 enthält. Die Spur des Stoßflächenelementes in dieser Ebene bildet mit der Anströmgeschwindigkeit w_1 den „Stoßfrontwinkel" γ (Bild 1).

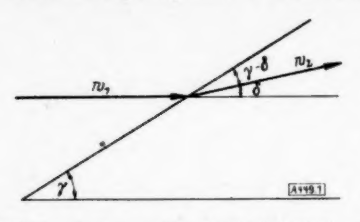


Bild 1. Änderung der Geschwindigkeit w im Verdichtungsstoß.

Der Stoßfrontwinkel γ ist der Parameter in der neuen Darstellung der Verdichtungsstoßtheorie. Sein Bereich erstreckt sich von $\frac{\pi}{2}$ (gerader Verdichtungsstoß) bis zum Machschen Winkel μ_1 der Anströmung (Verdichtungsstoß mit verschwindender Stärke):

$$\mu_1 \leqq \gamma \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Mit w_n und w_t werden die Geschwindigkeitskomponenten normal und tangential zum Stoßflächenelement bezeichnet; a^* sei die kritische Schallgeschwindigkeit.

3. Verhältnis der Drucke, Dichten, Temperaturen und Normalgeschwindigkeiten vor und hinter dem Stoß.

Bei Vernachlässigung von Wärmeleitung und innerer Reibung liefern die Erhaltung der Masse, der Energie und des Normalimpulses die folgenden grundlegenden Gleichungen für den Verdichtungsstoß:

$$\varrho_1 w_{n_1} = \varrho_2 w_{n_2} \quad \text{(1)},$$

$$\frac{k}{k-1}\frac{p_1}{\varrho_1} + \frac{w_1^2}{2} = \frac{k}{k-1}\frac{p_2}{\varrho_2} + \frac{w_2^2}{2} \quad \text{(2)},$$

$$\varrho_1 w_{n_1}^2 + p_1 = \varrho_2 w_{n_2}^2 + p_2 \quad \text{(3)}.$$

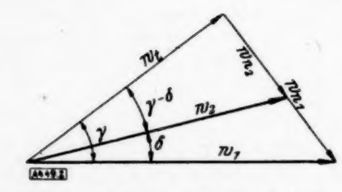


Bild 2. Zerlegung der Geschwindigkeiten w_1 und w_2.

Der tangential zum Stoß angesetzte Impulssatz sagt zusammen mit der Kontinuitätsgleichung aus, daß die Tangentialgeschwindigkeit w_t vor und hinter dem Stoß dieselbe ist (Bild 2). In dem Energiesatz (2) werden von beiden Steiten der Gleichung $\frac{w_t^2}{2}$ subtrahiert, so daß in dem resultierenden Gleichungssystem nur noch die Normalgeschwindigkeiten auftreten. Ferner werden die Gleichungen zweckmäßig mittels ϱ_1 und a_1 dimensionslos gemacht, indem man die erste Gleichung durch $\varrho_1 a_1$, die zweite durch a_1^2, die dritte durch $\varrho_1 a_1^2$ dividiert. Da $a_1^2 = k\frac{p_1}{\varrho_1}$ ist, wird bemerkenswerterweise der eine auftretende dimensionslose Parameter $\frac{p_1}{\varrho_1 a_1^2} = \frac{1}{k}$. Man erhält

$$\frac{w_{n_1}}{a_1} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\frac{w_{n_2}}{a_1} \quad \text{(1a)},$$

$$\frac{1}{k-1} + \frac{w_{n_1}^2}{2a_1^2} = \frac{k}{k-1}\frac{p_2}{\varrho_1 a_1^2}\frac{\varrho_1}{\varrho_2} + \frac{w_{n_2}^2}{2a_1^2} \quad \text{(2a)},$$

$$\frac{w_{n_1}^2}{a_1^2} + \frac{1}{k} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\frac{w_{n_2}^2}{a_1^2} + \frac{p_2}{\varrho_1 a_1^2} \quad \text{(3a)}.$$

Dies sind drei Gleichungen für die Dimensionslosen $\frac{\varrho_2}{\varrho_1}$, $\frac{w_{n_2}}{a_1}$, $\frac{p_2}{\varrho_1 a_1^2}$. Als einziger Parameter ist in dem Gleichungssystem $\frac{w_{n_1}}{a_1}$ enthalten. Da $w_{n_1} = w_1 \sin\gamma$ ist, kann man $\frac{w_{n_1}}{a_1} = Ma_1 \sin\gamma$ setzen, wobei $Ma_1 = \frac{w_1}{a_1}$ die Machsche Zahl der Anströmung ist. Indem $\frac{w_{n_2}}{a_1}$ nach (1a) in (2a) und (3a) eingesetzt wird, erhält man

$$\frac{1}{k-1}+\frac{w_{n_1}^2}{2\,a_1^2}=\frac{k}{k-1}\,\frac{p_2}{\varrho_1\,a_1^2}\,\frac{\varrho_1}{\varrho_2}+\frac{1}{2}\,\frac{w_{n_1}^2}{a_1^2}\,\frac{\varrho_1^2}{\varrho_2^2} \qquad \text{(2b)},$$

$$\frac{w_{n_1}^2}{a_1^2}+\frac{1}{k}=\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\,\frac{w_{n_1}^2}{a_1^2}+\frac{p_2}{\varrho_1\,a_1^2} \qquad \text{(3b)}.$$

Durch Elimination von $\frac{p_2}{\varrho_1\,a_1^2}$ folgt:

$$\frac{1}{k-1}+\frac{w_{n_1}^2}{2\,a_1^2}-\frac{1}{k-1}\,\frac{\varrho_1}{\varrho_2}-\frac{k}{k-1}\,\frac{w_{n_1}^2}{a_1^2}\,\frac{\varrho_1}{\varrho_2}+\frac{k}{k-1}\,\frac{w_{n_1}^2}{a_1^2}\,\frac{\varrho_1^2}{\varrho_2^2}-\frac{1}{2}\,\frac{w_{n_1}^2}{a_1^2}\,\frac{\varrho_1^2}{\varrho_2^2}=0 \qquad \text{(4)},$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\left(\frac{1}{k-1}\,\frac{\varrho_2}{\varrho_1}-\frac{k}{k-1}\,\frac{w_{n_1}^2}{a_1^2}\right)\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}-1\right)+\frac{w_{n_1}^2}{2\,a_1^2}\left(\frac{\varrho_2^2}{\varrho_1^2}-1\right)=0\,.$$

Nach Absonderung der trivialen Lösung $\varrho_2=\varrho_1$ erhält man

$$\left(\frac{1}{k-1}+\frac{w_{n_1}^2}{2\,a_1^2}\right)\frac{\varrho_2}{\varrho_1}=\frac{k+1}{2\,(k-1)}\,\frac{w_{n_1}^2}{a_1^2}\,,$$

also

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1}=\frac{\dfrac{k+1}{2}\,\dfrac{w_{n_1}^2}{a_1^2}}{1+\dfrac{k-1}{2}\,\dfrac{w_{n_1}^2}{a_1^2}}=\frac{\dfrac{k+1}{2}\,Ma_1^2\sin^2\gamma}{1+\dfrac{k-1}{2}\,Ma_1^2\sin^2\gamma} \qquad \text{(6)}.$$

Aus (3b) und (6) ergibt sich

$$\frac{p_2}{\varrho_1\,a_1^2}=2\,\frac{Ma_1^2\sin^2\gamma-1}{k+1}+\frac{1}{k} \qquad \text{(7)}.$$

Dividiert man durch $\frac{p_1}{\varrho_1\,a_1^2}=\frac{1}{k}$, so erhält man

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{2\,k}{k+1}\,Ma_1^2\sin^2\gamma-\frac{k-1}{k+1}\ {}^{3)} \qquad \text{(8)}.$$

Weiter ist nach (1) und (6)

$$\frac{w_{n_2}}{w_{n_1}}=\frac{1+\dfrac{k-1}{2}\,Ma_1^2\sin^2\gamma}{\dfrac{k+1}{2}\,Ma_1^2\sin^2\gamma} \qquad \text{(9)}.$$

Da nach der Gasgleichung $\frac{T_2}{T_1}=\frac{p_2\,\varrho_1}{p_1\,\varrho_2}$ ist, so folgt

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{\left(k\,Ma_1^2\sin^2\gamma-\dfrac{k-1}{2}\right)\left(\dfrac{k-1}{2}\,Ma_1^2\sin^2\gamma+1\right)}{\left(\dfrac{k+1}{2}\right)^2 Ma_1^2\sin^2\gamma} \qquad \text{(10)}.$$

In diesen Beziehungen (6), (8), (9), (10) ist die Theorie des schiefen Verdichtungsstoßes auf die des geraden zurückgeführt, wobei an Stelle der Gesamtgeschwindigkeiten beim geraden Verdichtungsstoß hier die Normalkomponenten der Geschwindigkeiten auftreten. Die Machsche Zahl der Anströmung ist durch die Machsche Zahl der Normalanströmung $Ma_1 \sin\gamma$ zu ersetzen. Man muß sich aber vor dem Trugschluß hüten, daß man jede beliebige Beziehung aus der Theorie des geraden Verdichtungsstoßes formal auf den schiefen Stoß übertragen könnte, indem man an Stelle der vollen Geschwindigkeiten einfach die Normalgeschwindigkeiten treten läßt. Beispielsweise gilt für den geraden Verdichtungsstoß die Prandtlsche Gleichung

$$w_1\,w_2=a^{*2}\,,$$

während für den schiefen Verdichtungsstoß

---

[3]) Wie nachträglich bemerkt wurde, hat L. Crocco in L'Aerotecnica Bd. XVII (1937), 519—536, (Singolarità della corrente gassosa iperacustica nell' intorno di una prora a diedro, Gl. (10')) Formeln angegeben, die den Gleichungen (6) und (8) entsprechen.

$$w_{n_1} w_{n_2} = a^{*2} - \frac{k-1}{k+1} w_t^2$$

ist, wie schon Th. Meyer a. a. O. gezeigt hat.

Eine Beziehung für die vollen Geschwindigkeiten beim schiefen Verdichtungsstoß, die ebenfalls nur den Parameter $Ma_1 \sin\gamma$ enthält, ergibt sich aus (2) unter Verwendung von (6) und (7):

$$\frac{w_1^2 - w_2^2}{a_1^2} = \frac{(k\, Ma_1^2 \sin^2\gamma + 1)(Ma_1^2 \sin^2\gamma - 1)}{\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 Ma_1^2 \sin^2\gamma} \quad \text{(11)}.$$

Für die praktische Berechnung von w_2 dürfte allerdings diese Formel weniger in Frage kommen.

4. Drosselfaktor und Entropiesprung.

Um Druck und Dichte in der Strömung vor dem Stoß bei gegebenem Geschwindigkeitsfeld auszurechnen, hat man die Energiegleichung

$$\frac{k}{k-1}\frac{p}{\varrho} + \frac{w^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{k+1}{k-1} a^{*2} = \frac{k}{k-1}\frac{p_0}{\varrho_0} \quad \text{(12a)}$$

und die Poissonsche Gleichung

$$\frac{p}{\varrho^k} = \frac{p_0}{\varrho_0^k} \quad \text{(13a)}$$

zu verknüpfen. Dabei bezeichnet p_0 den Kessel- oder Ruhedruck, ϱ_0 die Ruhedichte. Daraus ergibt sich

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{k-1} = 1 - \frac{k-1}{k+1}\left(\frac{w}{a^*}\right)^2 \quad \text{(14a)}.$$

Bezeichnet man mit p_0' den Ruhedruck hinter dem Verdichtungsstoß, mit ϱ_0' die betreffende Ruhedichte, so hat man entsprechend in der Strömung hinter dem Stoß als Energiegleichung

$$\frac{k}{k-1}\frac{p}{\varrho} + \frac{w^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{k+1}{k-1} a^{*2} = \frac{k}{k-1}\frac{p_0'}{\varrho_0'} \quad \text{(12b)}$$

und als Poissonsche Gleichung

$$\frac{p}{\varrho^k} = \frac{p_0'}{\varrho_0'^k} \quad \text{(13b)}.$$

Druck und Dichte ergeben sich aus

$$\left(\frac{p}{p_0'}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0'}\right)^{k-1} = 1 - \frac{k-1}{k+1}\left(\frac{w}{a^*}\right)^2 \quad \text{(14b)}.$$

Die beiden Verhältnisse $\frac{p_0'}{p_0}$ und $\frac{\varrho_0'}{\varrho_0}$ sind nach dem zweiten Teil der Gleichungen (12a) und (12b) einander gleich und sollen als „Drosselfaktor" K bezeichnet werden. Wendet man die Poissonsche Gleichung in der Form (13a) und (13b) auf die Drucke und Dichten unmittelbar an der Stoßfront an und dividiert diese Beziehungen durcheinander, so erhält man

$$\frac{p_1}{p_2}\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^k = \frac{p_0}{p_0'}\left(\frac{\varrho_0'}{\varrho_0}\right)^k,$$

was nach der Definition des Drosselfaktors gleich K^{k-1} wird. Folglich ist

$$K = \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \quad \text{(15)}.$$

Durch Einsetzen von (6) und (8) bekommt man schließlich

$$K = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k+1}{k-1}} \left(\frac{Ma_1^2 \sin^2\gamma}{1 + \frac{k-1}{2} Ma_1^2 \sin^2\gamma}\right)^{\frac{k}{k-1}} \left(\frac{1}{k\, Ma_1^2 \sin^2\gamma - \frac{k-1}{2}}\right)^{\frac{1}{k-1}} \quad \text{(16)}.$$

Durch den Drosselfaktor ist die Berechnung von Druck und Dichte in der Strömung hinter dem Verdichtungsstoß aus dem Geschwindigkeitsfeld ermöglicht.

Der Entropiesprung an der Stoßfront läßt sich leicht mittels des Drosselfaktors ausdrücken. In mechanischen Einheiten ist die Entropie der Masseneinheit mit R als Gaskonstante

$$s = \frac{R}{k-1} \ln \frac{p}{\varrho^k},$$

also ist der Entropiesprung

$$s_2 - s_1 = \frac{R}{k-1} \left\{ \ln \frac{p_2}{p_1} - k \ln \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \right\}.$$

Mithin ist nach (15)

$$s_2 - s_1 = -R \ln K \quad \text{(17)}.$$

5. Der Ablenkungswinkel.

Zur Berechnung des Ablenkungswinkels δ der Strömung durch den Verdichtungsstoß (siehe Bild 2) geht man am besten von den Beziehungen

$$w_{n_1} = w_t \cdot \operatorname{tg} \gamma,$$

$$w_{n_2} = w_t \cdot \operatorname{tg} (\gamma - \delta)$$

aus. Durch Division ergibt sich

$$\frac{\operatorname{tg} (\gamma - \delta)}{\operatorname{tg} \gamma} = \frac{w_{n_2}}{w_{n_1}},$$

woraus nach (9)

$$\frac{\operatorname{tg} (\gamma - \delta)}{\operatorname{tg} \gamma} = \frac{\frac{k-1}{2} Ma_1^2 \sin^2 \gamma + 1}{\frac{k+1}{2} Ma_1^2 \sin^2 \gamma} \quad \text{(18)}$$

folgt. Diese Gleichung löst man nach δ auf, indem ein trigonometrisches Additionstheorem auf $\operatorname{tg} (\gamma - \delta)$ angewandt wird:

$$\operatorname{cotg} \delta = \left(\frac{\frac{k+1}{2} Ma_1^2}{Ma_1^2 \sin^2 \gamma - 1} - 1 \right) \operatorname{tg} \gamma \quad \text{(19)}.$$

In dieser Formel treten Ma_1 und $\sin \gamma$ getrennt als Parameter auf.

6. Hinweise für den praktischen Gebrauch.

Abschließend werden die gewonnenen Formeln für die beim Verdichtungsstoß maßgeblichen Größen zusammengestellt:

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{w_{n_1}}{w_{n_2}} = \frac{\frac{k+1}{2} Ma_1^2 \sin^2 \gamma}{\frac{k-1}{2} Ma_1^2 \sin^2 \gamma + 1} \quad \text{(I)},$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1} Ma_1^2 \sin^2 \gamma - \frac{k-1}{k+1} \quad \text{(II)},$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\left(k\, Ma_1^2 \sin^2 \gamma - \frac{k-1}{2} \right) \left(\frac{k-1}{2} Ma_1^2 \sin^2 \gamma + 1 \right)}{\left(\frac{k+1}{2} \right)^2 Ma_1^2 \sin^2 \gamma} \quad \text{(III)},$$

$$K = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \left(\frac{Ma_1^2 \sin^2 \gamma}{1 + \frac{k-1}{2} Ma_1^2 \sin^2 \gamma} \right)^{\frac{k}{k-1}} \left(\frac{1}{k\, Ma_1^2 \sin^2 \gamma - \frac{k-1}{2}} \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad \text{(IV)},$$

$$\operatorname{cotg} \delta = \left(\frac{\frac{k+1}{2} Ma_1^2}{Ma_1^2 \sin^2 \gamma - 1} - 1 \right) \operatorname{tg} \gamma \quad \text{(V)}.$$

Zahlentafel 1.

Die Dimensionslosen $\frac{p_2}{p_1}$, $\frac{\varrho_2}{\varrho_1}$, $\frac{T_2}{T_1}$ und K in Abhängigkeit von $Ma_1 \sin\gamma$ für $k = 1{,}405$.

$Ma_1 \sin\gamma$	$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{\varrho_2}{\varrho_1}$	$\frac{T_2}{T_1}$	K	$Ma_1 \sin\gamma$	$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{\varrho_2}{\varrho_1}$	$\frac{T_2}{T_1}$	K
1,00	1,000	1,000	1,000	1,000	3,00	10,35	3,834	2,699	0,331
1,05	1,120	1,084	1,033	1,000	3,05	10,70	3,879	2,759	0,317
1,10	1,245	1,169	1,066	0,999	3,10	11,06	3,923	2,820	0,303
1,15	1,377	1,254	1,098	0,997	3,15	11,43	3,965	2,881	0,291
1,20	1,514	1,341	1,129	0,993	3,20	11,80	4,006	2,944	0,278
1,25	1,657	1,427	1,161	0,987	3,25	12,17	4,046	3,008	0,267
1,30	1,806	1,514	1,193	0,979	3,30	12,56	4,086	3,073	0,255
1,35	1,961	1,601	1,225	0,970	3,35	12,94	4,124	3,139	0,2447
1,40	2,122	1,687	1,257	0,958	3,40	13,34	4,161	3,206	0,2344
1,45	2,288	1,773	1,290	0,945	3,45	13,74	4,197	3,273	0,2246
1,50	2,460	1,859	1,324	0,930	3,50	14,14	4,232	3,342	0,2151
1,55	2,639	1,943	1,358	0,913	3,55	14,56	4,266	3,412	0,2061
1,60	2,823	2,027	1,392	0,895	3,60	14,97	4,300	3,482	0,1975
1,65	3,013	2,110	1,428	0,876	3,65	15,40	4,332	3,554	0,1892
1,70	3,208	2,192	1,463	0,856	3,70	15,83	4,364	3,627	0,1813
1,75	3,410	2,273	1,500	0,835	3,75	16,26	4,395	3,700	0,1737
1,80	3,617	2,353	1,538	0,813	3,80	16,70	4,425	3,775	0,1665
1,85	3,830	2,431	1,576	0,791	3,85	17,15	4,454	3,850	0,1596
1,90	4,050	2,508	1,615	0,768	3,90	17,60	4,483	3,927	0,1530
1,95	4,274	2,583	1,655	0,745	3,95	18,06	4,511	4,004	0,1467
2,00	4,505	2,657	1,695	0,722	4,00	18,53	4,538	4,083	0,1407
2,05	4,742	2,730	1,737	0,699	4,05	19,00	4,564	4,162	0,1350
2,10	4,984	2,801	1,779	0,675	4,10	19,47	4,590	4,242	0,1295
2,15	5,233	2,871	1,822	0,652	4,15	19,95	4,615	4,324	0,1242
2,20	5,487	2,939	1,867	0,629	4,20	20,44	4,639	4,406	0,1192
2,25	5,747	3,006	1,912	0,607	4,25	20,94	4,663	4,489	0,1144
2,30	6,012	3,071	1,958	0,585	4,30	21,44	4,687	4,574	0,1098
2,35	6,284	3,135	2,005	0,563	4,35	21,94	4,709	4,659	0,1054
2,40	6,562	3,197	2,052	0,542	4,40	22,45	4,731	4,745	0,1012
2,45	6,845	3,258	2,101	0,521	4,45	22,97	4,753	4,833	0,0972
2,50	7,134	3,317	2,151	0,501	4,50	23,49	4,774	4,921	0,0934
2,55	7,429	3,375	2,201	0,481	4,55	24,02	4,795	5,010	0,0897
2,60	7,730	3,432	2,253	0,462	4,60	24,55	4,815	5,100	0,0862
2,65	8,037	3,487	2,305	0,443	4,65	25,10	4,834	5,191	0,0828
2,70	8,349	3,540	2,358	0,426	4,70	25,64	4,853	5,283	0,0796
2,75	8,668	3,592	2,413	0,408	4,75	26,19	4,872	5,376	0,0766
2,80	8,992	3,643	2,468	0,392	4,80	26,75	4,890	5,470	0,0736
2,85	9,322	3,693	2,524	0,375	4,85	27,32	4,908	5,566	0,0708
2,90	9,658	3,741	2,581	0,360	4,90	27,88	4,925	5,662	0,0681
2,95	10,000	3,788	2,639	0,345	4,95	28,46	4,942	5,759	0,0656
					5,00	29,04	4,959	5,857	0,0631

Zahlentafel 2 (1. Teil). Ablenkungswinkel δ in Abhängigkeit vom Stoßfrontwinkel γ bei verschiedenen Machschen Zahlen Ma_1 für $k = 1{,}405$.

$\gamma°$	$Ma_1 =$ 1,10	1,20	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90	2,00
90	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
88	0,33	0,68	1,02	1,37	1,71	2,05	2,37	2,69	3,00	3,30
86	0,65	1,34	2,02	2,71	3,38	4,04	4,69	5,31	5,92	6,50
84	0,94	1,95	2,97	3,98	4,97	5,94	6,89	7,80	8,68	9,52
82	1,18	2,51	3,84	5,16	6,45	7,71	8,93	10,09	11,21	12,28
80	1,37	3,00	4,62	6,23	7,79	9,31	10,76	12,16	13,48	14,73
78	1,48	3,39	5,29	7,16	8,97	10,71	12,37	13,96	15,45	16,86
76	1,51	3,69	5,84	7,94	9,96	11,90	13,74	15,48	17,11	18,64
74	1,45	3,87	6,25	8,56	10,77	12,88	14,86	16,73	18,47	20,09
72	1,29	3,93	6,52	9,01	11,38	13,63	15,74	17,70	19,52	21,21
70	1,03	3,87	6,64	9,29	11,80	14,16	16,37	18,41	20,29	22,03
68	0,66	3,68	6,61	9,40	12,03	14,49	16,77	18,87	20,80	22,56
66	0,17	3,36	6,43	9,34	12,07	14,60	16,94	19,09	21,05	22,84
64		2,91	6,10	9,11	11,93	14,53	16,91	19,09	21,08	22,88
62		2,32	5,62	8,73	11,61	14,26	16,69	18,90	20,90	22,71
60		1,60	5,00	8,18	11,13	13,83	16,28	18,51	20,52	22,34
58		0,75	4,24	7,49	10,48	13,22	15,70	17,95	19,97	21,79
56			3,33	6,64	9,69	12,46	14,96	17,22	19,26	21,08
54			2,29	5,66	8,74	11,54	14,07	16,35	18,39	20,22
52			1,12	4,53	7,66	10,49	13,04	15,33	17,38	19,22
50				3,27	6,43	9,29	11,87	14,17	16,24	18,08
48				1,87	5,07	7,96	10,56	12,89	14,96	16,82
46				0,34	3,57	6,50	9,12	11,47	13,57	15,44
44					1,94	4,90	7,56	9,93	12,05	13,94
42					0,17	3,17	5,86	8,27	10,41	12,33
40						1,30	4,03	6,48	8,65	10,60
38							2,07	4,55	6,77	8,75
36								2,49	4,75	6,77
34								0,29	2,60	4,66
32									0,29	2,41
30										0,00

Der Zusammenhang der physikalischen Größen wird in dieser Darstellung fast ausschließlich durch den zusammengesetzten Parameter $Ma_1 \sin\gamma$ vermittelt. Nur in dem Ausdruck für δ treten Ma_1 und γ als zwei getrennte Parameter auf. Dieses Gleichungssystem hat sich bei allgemeinen Betrachtungen in der formelmäßigen Rechnung praktisch bewährt, für zahlenmäßige Auswertungen bei speziellen Beispielen erwies es sich als besonders brauchbar. Nach den Formeln (I) bis (V) sind die Zahlentafeln 1 und 2 berechnet. Die Bilder 3 und 4 bringen graphische Darstellungen dieser Formeln. In Bild 4 sind die Maxima der einzelnen Funktionen durch eine gestrichelte Kurve verbunden worden, deren Gleichung angebbar ist.

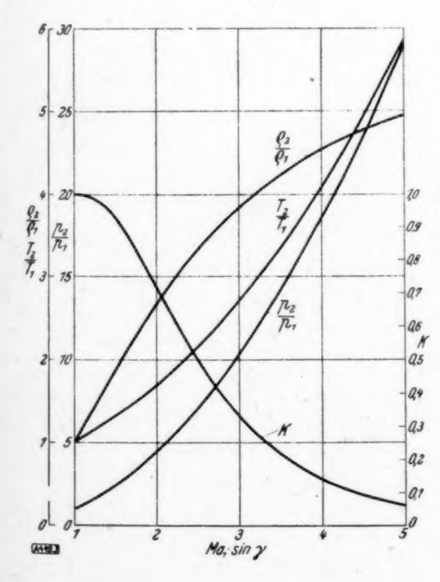


Bild 3 (links).

Die Dimensionslosen $\frac{p_2}{p_1}$, $\frac{\varrho_2}{\varrho_1}$, $\frac{T_2}{T_1}$ und K in Abhängigkeit von $Ma_1 \sin\gamma$ für $k = 1{,}405$.

Zahlentafel 2 (2. Teil).

γ^0	2,20	2,40	2,60	2,80	3.00	3,20	3,40	3,60	3,80	4,00
90	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
88	3,86	4,37	4,83	5,25	5,62	5,96	6,26	6,54	6,78	7,00
86	7,59	8,57	9,47	10,27	10,98	11,63	12,20	12,71	13,17	13,59
84	11,08	12,49	13,75	14,87	15,87	16,76	17,55	18,25	18,88	19,44
82	14,25	16,00	17,56	18,94	20,15	21,22	22,17	23,01	23,75	24,41
80	17,03	19,06	20,85	22,41	23,77	24,97	26,01	26,93	27,74	28,46
78	19,42	21,65	23,59	25,28	26,74	28,00	29,11	30,08	30,92	31,66
76	21,40	23,77	25,82	27,58	29,09	30,39	31,52	32,51	33,36	34,11
74	22,98	25,45	27,56	29,36	30,89	32,21	33,34	34,33	35,18	35,92
72	24,20	26,73	28,87	30,68	32,22	33,53	34,65	35,62	36,46	37,20
70	25,08	27,64	29,79	31,60	33,12	34,42	35,53	36,48	37,31	38,02
68	25,65	28,23	30,37	32,16	33,67	34,95	36,04	36,97	37,77	38,47
66	25,95	28,52	30,65	32,43	33,92	35,17	36,24	37,15	37,93	38,61
64	26,00	28,56	30,68	32,43	33,90	35,13	36,17	37,06	37,83	38,49
62	25,83	28,38	30,47	32,20	33,65	34,86	35,88	36,76	37,50	38,15
60	25,45	27,99	30,07	31,78	33,20	34,40	35,40	36,26	36,99	37,62
58	24,90	27,43	29,49	31,18	32,59	33,76	34,75	35,59	36,32	36,93
56	24,19	26,70	28,75	30,43	31,82	32,98	33,96	34,79	35,50	36,11
54	23,33	25,84	27,87	29,54	30,92	32,07	33,04	33,86	34,56	35,17
52	22,33	24,84	26,87	28,53	29,90	31,05	32,01	32,82	33,52	34,12
50	21,21	23,72	25,75	27,41	28,78	29,92	30,87	31,69	32,38	32,97
48	19,96	22,48	24,52	26,18	27,55	28,69	29,65	30,46	31,15	31,75
46	18,61	21,14	23,19	24,86	26,24	27,38	28,34	29,15	29,85	30,44
44	17,14	19,70	21,76	23,45	24,84	25,99	26,96	27,77	28,47	29,07
42	15,57	18,16	20,25	21,95	23,35	24,52	25,50	26,32	27,03	27,63
40	13,88	16,51	18,64	20,37	21,79	22,97	23,97	24,80	25,52	26,13
38	12,09	14,77	16,94	18,70	20,15	21,36	22,37	23,22	23,95	24,57
36	10,19	12,93	15,14	16,94	18,43	19,66	20,70	21,57	22,32	22,96
34	8,16	10,97	13,25	15,10	16,63	17,89	18,96	19,86	20,62	21,28
32	6,01	8,90	11,24	13,16	14,73	16,04	17,14	18,07	18,86	19,54
30	3,71	6,70	9,13	11,11	12,74	14,10	15,25	16,21	17,04	17,74
28	1,25	4,35	6,88	8,94	10,65	12,07	13,26	14,27	15,13	15,87
26		1,84	4,48	6,64	8,43	9,92	11,17	12,23	13,14	13,92
24			1,90	4,18	6,07	7,64	8,97	10,09	11,05	11,87
22				1,52	3,53	5,20	6,62	7,81	8,84	9,72
20					0,77	2,57	4,09	5,38	6,48	7,43
18							1,33	2,73	3,93	4,96
16									1,12	2,26

Bild 4 (rechts). Ablenkungswinkel δ in Abhängigkeit vom Stoßfrontwinkel γ mit Ma_1 als Parameter für $k = 1{,}405$.

Zahlentafel 2 (3. Teil).

γ^0	4,5	5,0	6,0	8,0	10,0	∞
90	0	0	0	0	0	0
88	7,46	7,82	8,33	8,90	9,18	9,72
86	14,44	15,11	16,05	17,07	17,58	18,55
84	20,60	21,49	22,73	24,06	24,72	25,97
82	25,76	26,79	28,21	29,73	30,47	31,85
80	29,92	31,02	32,53	34,13	34,90	36,32
78	33,17	34,29	35,83	37,43	38,20	39,61
76	35,62	36,75	38,27	39,82	40,59	41,96
74	37,41	38,52	40,00	41,53	42,26	43,58
72	38,65	39,73	41,17	42,64	43,34	44,60
70	39,44	40,48	41,87	43,29	43,96	45,17
68	39,85	40,86	42,21	43,57	44,21	45,37
66	39,95	40,93	42,23	43,55	44,17	45,28
64	39,80	40,75	42,01	43,28	43,88	44,95
62	39,42	40,35	41,57	42,81	43,39	44,43
60	38,87	39,77	40,96	42,17	42,73	43,74
58	38,16	39,04	40,21	41,38	41,93	42,92
56	37,31	38,18	39,33	40,48	41,02	41,98
54	36,35	37,21	38,34	39,47	40,00	40,95
52	35,29	36,14	37,26	38,38	38,90	39,84
50	34,14	34,98	36,09	37,21	37,72	38,65
48	32,91	33,75	34,86	35,97	36,48	37,41
46	31,61	32,45	33,56	34,67	35,19	36,11
44	30,24	31,09	32,20	33,32	33,84	34,76
42	28,82	29,67	30,80	31,92	32,44	33,38
40	27,34	28,20	29,34	30,48	31,01	31,96
38	25,80	26,68	27,84	29,00	29,54	30,50
36	24,21	25,11	26,30	27,49	28,04	29,02
34	22,57	23,50	24,72	25,94	26,51	27,52
32	20,88	21,84	23,10	24,36	24,95	25,99
30	19,13	20,13	21,44	22,75	23,36	24,45
28	17,32	18,36	19,74	21,11	21,75	22,88
26	15,44	16,54	17,99	19,43	20,11	21,31
24	13,49	14,66	16,19	17,73	18,44	19,71
22	11,45	12,70	14,34	15,98	16,74	18,11
20	9,29	10,64	12,41	14,19	15,02	16,49
18	7,00	8,47	10,41	12,35	13,25	14,87
16	4,51	6,14	8,29	10,44	11,44	13,24
14	1,76	3,59	6,01	8,44	9,57	11,60
12		0,73	3,50	6,31	7,61	9,95
10			0,64	3,97	5,52	8,30
8				1,27	3,20	6,64
6					0,42	4,99
4						3,33
2						1,66
0						0

Führt man noch den Machschen Winkel $\mu_1 = \text{arc}\sin\dfrac{1}{Ma_1}$ ein und benutzt man die Tatsache, daß für $\dfrac{\sin\gamma}{\sin\mu_1} = \text{const.}$ die in (I) bis (IV) links stehenden Dimensionslosen unverändert bleiben, so kann man leicht zu einfachen Diagrammen gelangen, welche in der Praxis, besonders bei überschlagsmäßigen Rechnungen, gut verwendbar sind. Man braucht nur jeweils in einem $\sin\mu_1$, $\sin\gamma$-System eine Anzahl ausgewählter Geraden durch den Koordinatenursprung zu ziehen und an sie die entsprechenden Zahlenwerte zu schreiben. Bild 5 zeigt als Beispiel ein derart angelegtes Diagramm.

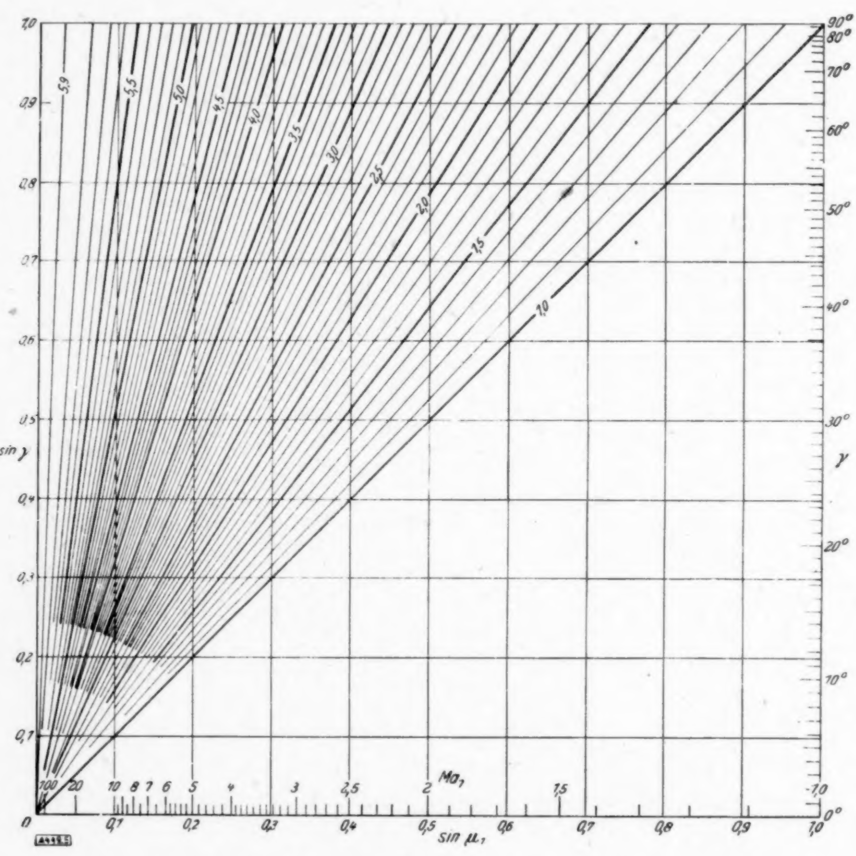


Bild 5. Geraden gleicher $\dfrac{\varrho_2}{\varrho_1}$-Werte im $\sin\mu_1$, $\sin\gamma$-Feld.

Für den rechnerischen Aufbau der Stoßfront ist es sehr wichtig, den Zusammenhang zwischen w_2 und δ zu haben, um die Verknüpfung zwischen Verdichtungsstoßgleichungen und den charakteristischen Differentialgleichungen für Überschallströmungen direkt vornehmen zu können. Zu diesem Zweck wird δ bei der betreffenden Machschen Zahl Ma_1 der Anströmung als Funktion von γ nach Formel (V) in dem in Betracht kommenden Teilbereich berechnet, der sich meist leicht abschätzen läßt. Um w_2 ebenfalls als Funktion von γ zu berechnen, geht man etwa von der Beziehung

$$w_t = w_1 \cos\gamma = w_2 \cos(\gamma - \delta)$$

aus, die sich aus Bild 2 sofort ergibt. Danach ist

$$w_2 = w_1 \frac{\cos\gamma}{\cos(\gamma - \delta)},$$

womit auch w_2 über das bereits berechnete δ leicht als Funktion von γ ermittelt werden kann. Das angedeutete Vorgehen beim Aufbau der Stoßfront erwies sich in der rechnerischen Einfachheit und in der Genauigkeit früheren Verfahren als überlegen.

Zum Schluß möchte ich Herrn Prof. Tollmien für die freundliche Beratung bei der Abfassung dieser Arbeit aufrichtig danken.

Strömung an einer Luftblase im senkrechten Rohr.

Von *D. T. Dumitrescu* in Bukarest.

Die Aufgabe: Form und Geschwindigkeit einer in einem vertikalen Rohr aufsteigenden, unendlich langen Luftblase zu finden, führt unter Vernachlässigung der Kapillar- und Zähigkeitskräfte auf ein Eigenwertproblem der Differentialgleichung $\Delta \varphi = 0$, das in erster Annäherung unter der der Wirklichkeit gut entsprechenden Annahme gelöst wird, daß der Meridianschnitt der Blase in der Umgebung der Kuppe durch den Krümmungskreis ersetzt werden kann. Der Eigenwert, der sich als Funktion dieses Krümmungsradius angeben läßt, wird dadurch bestimmt, daß die asymptotische Lösung mit stetiger Tangente in den Krümmungskreis übergehen soll. Berechneter und experimentell gefundener Wert stimmen gut überein.

I. Einleitung.

Aufgabenstellung und Formulierung der Randwertaufgabe. Die Strömungen schwerer Flüssigkeiten mit freier Oberfläche sind trotz ihres häufigen Auftretens verhältnismäßig wenig untersucht. Von den bekannten Arbeiten nennen wir diejenigen von Blasius[1]), welcher sich mit einem ebenen Problem beschäftigt hat, und eine von Förster[2]), welcher eine Reihenentwicklung im Raum für rotationssymetrische Fälle angegeben hat.

Die folgende Arbeit[3]) handelt von der Form und der Aufsteigegeschwindigkeit einer unendlich langen Luftblase, die in einem vertikalen, flüssigkeitsgefüllten Kreisrohr aufsteigt. Die Form der Blase ist aus Bild 1 zu ersehen[4]). Die dreidimensionale, rotationssymmetrische Strömung wird als stationär und wirbelfrei betrachtet, und zur Lösung des Problems wird die Potentialtheorie herangezogen.

Bild 1. In einem mit Wasser gefüllten Rohr aufsteigende Luftblase.

Der Einfluß der Kapillarkräfte darf, besonders bei größerem Durchmesser des Rohres, vernachlässigt werden.

Um die Randbedingungen auf der freien Oberfläche zu erhalten, betrachten wir allgemeiner eine Blase von einer bestimmten Dichte δ_2, die in einer anderen Flüssigkeit, deren Dichte δ_1 ist, aufsteigt. Beziehen wir den Vorgang auf ein relativ zur Blase ruhendes Koordinatensystem, so handelt es sich um eine stationäre Strömung.

Ist dann $0z$ die Symmetrieachse des Rohres, p_1 der Druck, w die Geschwindigkeit eines Teilchens und $\varphi = +gz$ das Potential der äußeren Kräfte in der Flüssigkeit δ_1 (z nach oben positiv), so lautet die Bernoullische Gleichung auf der Trennungsfläche

$$\frac{p_1}{\delta_1} + \frac{w^2}{2} - g z = c_1$$

und wenn wir den Druck im Staupunkt ($z = 0$) mit p_0 bezeichnen, so ist $c_1 = \frac{p_0}{\delta_1}$, also

$$p_1 = p_0 + g\,\delta_1 z - \frac{w^2}{2}\,\delta_1 .$$

Andererseits besteht in der ruhenden Blase die Gleichung

$$\frac{p_2}{\delta_2} - g z = c_2 ,$$

wo $c_2 = \frac{p_0}{\delta_2}$ ist, wie sich leicht ergibt, wenn wir verlangen, daß $p_2 = p_0$ für $z = 0$. Daraus folgt

$$p_2 = p_0 + g\,\delta_2 z$$

und weil auf der Trennungsfläche der Druck beiderseits derselbe sein muß ($p_1 = p_2$), folgt

$$w = \sqrt{2 g z\left(1 - \frac{\delta_2}{\delta_1}\right)}$$

[1]) H. Blasius: Funktionentheoretische Methoden in der Hydrodynamik. Z. Math. u. Phys. Bd. 58 (1910), S. 90.
[2]) Förster: Über Flüssigkeitsstrahlen, deren Formen Drehungskörper sind. Z. Math. u. Phys. Bd. 62 (1912), S. 319.
[3]) Für die Anregung zu dieser Arbeit und für die wertvollen Ratschläge bei ihrer Durchführung bin ich meinem hochverehrten Lehrer Herrn Professor Dr. L. Prandtl zu besonderem Dank verpflichtet.
[4]) Photographie, vgl. S. 148.

oder wegen $\delta_2 \ll \delta_1$ folgt als Randbedingung für die Geschwindigkeit auf der Blase einfacher $w = \sqrt{2\,g\,z}$. Die mathematische Formulierung unseres Problems lautet jetzt, wenn wir mit φ das Geschwindigkeitspotential bezeichnen, eine Lösung der Differentialgleichung $\Delta\varphi = 0$ zu finden, so daß 1. auf einer noch nicht bekannten Stromlinie $w = \sqrt{2\,g\,z}$ wird, und 2. die Wände des Rohres selbst Stromlinien sind.

Es handelt sich also um kein eigentliches Randwertproblem, und die mathematischen Schwierigkeiten bestehen in der Tatsache, daß die erste Randbedingung auf einer noch nicht vorgegebenen Kurve zu erfüllen ist, deren Form gleichzeitig mit der Lösung des Problems zu bestimmen ist. Es wird sich zeigen, daß es sich um ein Eigenwertproblem handelt.

Das im folgenden durchgeführte Verfahren zur Lösung des Problems beruht auf zwei Entwicklungen, einmal einer Reihenentwicklung vom Staupunkt ($z = 0$) aus, dann auf einer asymptotischen Entwicklung von $z = -\infty$ herein. Diese beiden Entwicklungen werden stetig und mit stetiger erster Ableitung aneinander angeschlossen.

II. Theoretischer Teil.

1. Dimensionsbetrachtungen. Die Aufsteigegeschwindigkeit der Blase läßt sich bis auf eine Konstante, den Eigenwert unseres Problems, durch Dimensionsbetrachtungen bestimmen. Zu diesem Zwecke wollen wir das Π-Theorem von Buckingham[5]) in der von Bridgman[6]) angegebenen Form anwenden.

Sind $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ meßbare Größen und Dimensionskonstanten einer Naturerscheinung, dann lautet das Π-Theorem folgendermaßen:

Wenn die Gleichung $\Phi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0$ in den n Veränderlichen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ eine „vollständige Gleichung" sein soll (d. h. eine Gleichung, die ohne Änderung ihrer Form richtig bleibt, wenn die Größen der Grundeinheiten irgendwie geändert werden, denn nur auf solche Gleichungen ist natürlich die Dimensionsanalysis anwendbar), dann hat die Lösung die Form

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_{n+1}) = 0,$$

wo die π_i die $n - m$ unabhängigen Produkte der Argumente $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ usw. darstellen, die dimensionslos in den Grundeinheiten sind und m die Anzahl der Grundeinheiten ist. Man kann die Lösung nach einem Produkt auflösen, und man bekommt

$$\alpha = \beta^p \gamma^q \delta^r \ldots \Psi(\pi_2, \pi_3, \ldots \pi_n),$$

wo die $p, q, r, \ldots$ so beschaffen sind, daß $\alpha^{-1} \beta^p \gamma^q \delta^r \ldots$ dimensionslos ist. Diese Form ist der mathematische Ausdruck der Homogenität in den Dimensionen.

Die charakteristischen Größen unseres Problems sind die Aufsteigegeschwindigkeit $w\,[L\,T^{-1}]$ der Blase, die Dichte $\delta\,[M\,L^{-3}]$ der Flüssigkeit, die Erdbeschleunigung $g\,[L\,T^{-2}]$ und der Radius $R\,[L]$ des Rohres. Wir haben $n = 4$ Veränderliche und $m = 3$ Grundeinheiten und können infolgedessen durch das Π-Theorem nur ein einziges ($n - m = 1$) dimensionsloses Produkt haben, das gleich einer Konstante ist.

Weil wir die Aufsteigegeschwindigkeit der Blase bestimmen wollen, setzen wir den Exponent dieser Größe $= 1$ und bekommen als dimensionsloses Produkt $w\,\delta^{-p}\,g^{-q}\,R^{-r}$; setzen wir das Produkt gleich einer Konstante λ und lösen nach w, so bekommen wir

$$w = \lambda\,\delta^p\,g^q\,R^r.$$

Die rechte Seite muß die Dimension einer Geschwindigkeit haben. Setzen wir für δ, g, R ihre Dimensionsformel ein, so erhalten wir

$$[L\,T^{-1}] = [M\,L^{-3}]^p\,[L\,T^{-2}]^q\,[L]^r.$$

Durch Vergleich der Exponenten von L, M, T auf der linken und rechten Seite ergibt sich ein System von drei linearen Gleichungen für die drei Unbekannten p, q, r. Die Lösung lautet $p = 0$, $q = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{2}$. Infolgedessen ist

$$w = \lambda\sqrt{g\,R}.$$

Also ist die Aufsteigegeschwindigkeit der Blase proportional der Wurzel aus dem Radius des Rohres und der Schwerebeschleunigung. $\lambda^2 = \frac{w^2}{g\,R}$ ist die sogenannte Froudesche Zahl und gibt das Verhältnis der Trägheitskräfte zu den Schwerekräften.

[5]) Buckingham: Phys. Rev. Bd. 4 (1914), S. 345.

[6]) Bridgman: Theorie der physikalischen Dimensionen. Deutsche Ausgabe herausgegeben von H. Holl. Leipzig und Berlin 1932.

Die Aufsteigegeschwindigkeit der Blase hängt, wie zu erwarten, nicht von der Dichte δ ab; denn ist z. B. die Dichte doppelt so groß, so wird auch die auf jedes Element wirkende Schwerkraft doppelt so groß, und weil die doppelte Kraft durch die doppelte Masse ihres Elementes ausgeglichen wird, bleibt die Beschleunigung und infolgedessen auch die Geschwindigkeit unverändert.

2. Reihenansatz für das Potential. Weil unsere Strömung rotationssymmetrisch ist, so müssen das Geschwindigkeitspotential und die Stokessche Stromfunktion die folgenden Gleichungen in Zylinderkoordinaten befriedigen:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}=0 \qquad r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}=0.$$

Die der Grenzbedingung für $r=R$ entsprechenden Lösungen dieser Gleichungen lauten[7]):

$$\varphi=\sum_{i=1}^{n} c_i J_0\left(\beta_i \frac{r}{R}\right) e^{-\beta_i \frac{z}{R}},$$

$$\psi=r\sum_{i=1}^{n} c_i J_1\left(\beta_i \frac{r}{R}\right) e^{-\beta_i \frac{z}{R}}+\Gamma,$$

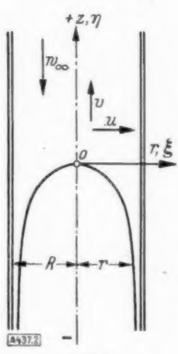


Bild 2. Koordinatenwahl.

wo β_i die Nullstellen der Besselschen Funktion erster Art und erster Ordnung und c_i willkürliche Konstanten bedeuten und wobei Γ eine willkürliche Konstante ist, die auch $=0$ gesetzt werden kann. (Es ist $J_1(\beta)=0$ für $\beta_1=3{,}83171$, $\beta_2=7{,}01559$ usw.) Wenn wir noch eine Parallelströmung, deren Geschwindigkeit w_∞ ist, überlagern, so bekommen wir

$$\varphi=-w_\infty z+\sum_{i=1}^{n} c_i J_0\left(\beta_i \frac{r}{R}\right) e^{-\beta_i \frac{z}{R}},$$

$$\psi=\frac{w_\infty}{2} r^2+r\sum_{i=1}^{n} c_i J_1\left(\beta_i \frac{r}{R}\right) e^{-\beta_i \frac{z}{R}}$$

Wir machen die Formeln dimensionslos mit $w_\infty=\lambda\sqrt{gR}$ und R, wo wie oben λ eine dimensionslose Konstante, g die Erdbeschleunigung und R den Radius des Rohres bedeuten. Die dimensionslosen Größen sind

$$\varphi^*=\frac{\varphi}{\lambda\sqrt{gR^3}},\quad \psi^*=\frac{\psi}{\lambda\sqrt{gR^5}},\quad u^*=\frac{u}{\lambda\sqrt{gR}},\quad v^*=\frac{v}{\lambda\sqrt{gR}},$$

$$\frac{z}{R}=\eta,\qquad \frac{r}{R}=\xi,\qquad k_i=\frac{c_i}{\sqrt{gR^3}}.$$

Dann lauten das Geschwindigkeitspotential und die Stromfunktion, dimensionslos geschrieben, folgendermaßen:

$$\left.\begin{aligned}\varphi^*&=-\eta+\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} k_i J_0(\beta_i\xi)\, e^{-\beta_i\eta}\\ \psi^*&=\frac{\xi^2}{2}+\frac{\xi}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} k_i J_1(\beta_i\xi)\, e^{-\beta_i\eta}\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1).$$

Die Komponenten u^* und v^* der Geschwindigkeit sind durch die Formel

$$\left.\begin{aligned}u^*&=\frac{\partial\varphi^*}{\partial\xi}=\frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi^*}{\partial\eta}=-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} k_i\beta_i J_1(\beta_i\xi)\, e^{-\beta_i\eta}\\ v^*&=\frac{\partial\varphi^*}{\partial\eta}=-\frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi^*}{\partial\xi}=-1-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} k_i\beta_i J_0(\beta_i\xi)\, e^{-\beta_i\eta}\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

[7]) H. Lamb: Hydrodynamics, S. 135.

gegeben. Wenn wir verlangen, daß $\xi=\eta=0$ ein Staupunkt sein soll ($u=v=0$), so folgt aus (2) wegen $J_0(0)=1$

$$\lambda=-\sum_{i=1}^{n} k_i\beta_i \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Die Gl. (3) bestimmt die dimensionslose Größe λ unseres Problems als Funktion der Konstanten k_i.

In der Einleitung wurde gezeigt, daß auf der Trennungsfläche:

$$w^2=u^2+v^2=2gz$$

oder

$$\lambda^2 g R\left\{\left\{\frac{u^2}{\lambda g R}\right\}^2+\left\{\frac{v^2}{\lambda g R}\right\}^2\right\}=2gR\frac{z}{R},$$

also

$$u^{*2}+v^{*2}=\frac{2}{\lambda^2}\eta \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

sein muß. Wenn wir in der Gl. (4) u^* und v^* durch ihre Ausdrücke (2) ersetzen unter Berücksichtigung, daß $\lambda=-\sum_{i=1}^{n}k_i\beta_i$, bekommen wir nach Division der Stromfunktion durch ξ ($\xi=0$ ist auch eine Stromlinie) die folgenden fundamentalen Gleichungen unseres Problems:

$$\frac{\psi^*}{\xi}=\sum_{i=1}^{n}k_i J_1(\beta_i\xi)e^{-\beta_i\eta}-\frac{1}{2}\xi\sum_{i=1}^{n}k_i\beta_i=0 \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}k_i\beta_i J_1(\beta_i\xi)e^{-\beta_i\eta}\right\}^2+\left\{-\sum_{i=1}^{n}k_i\beta_i+\sum_{i=1}^{n}k_i\beta_i J_0(\beta_i\xi)e^{-\beta_i\eta}\right\}^2=|2\eta| \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Die Gl. (5) gibt die Form der Blase, und die Gl. (6) bringt die noch zu erfüllende Randbedingung ($u^2+v^2=2gz$) zum Ausdruck. (Die weitere Randbedingung, wonach die Wände des Rohres Stromlinien sein sollen, ist bereits erfüllt.) Es handelt sich jetzt darum, die willkürlichen Konstanten k_i so zu bestimmen, daß die entsprechenden Werte ξ, η simultan die Gl. (5) und (6) befriedigen.

Sind diese Konstanten bestimmt, so ergibt sich die Aufsteigegeschwindigkeit und die Form der Blase aus Gl. (3) bzw. (5).

3. Bestimmung der Koeffizienten k_i. Zur Bestimmung der Koeffizienten k_i machen wir von den bekannten Reihenentwicklungen Gebrauch.

$$J_0(\beta_i\xi)=1-\frac{1}{1^2}\left(\frac{\beta_i}{2}\right)^2\xi^2+\frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{\beta_i}{2}\right)^4\xi^4-\frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{\beta_i}{2}\right)^6\xi^6+\frac{1}{(4!)^2}\left(\frac{\beta_i}{2}\right)^8\xi^8-\cdots,$$

$$J_1(\beta_i\xi)=\left(\frac{\beta_i}{2}\right)\xi-\frac{1}{1!2!}\left(\frac{\beta_i}{2}\right)^3\xi^3+\frac{1}{2!3!}\left(\frac{\beta_i}{2}\right)^5\xi^5-\frac{1}{3!4!}\left(\frac{\beta_i}{2}\right)^7\xi^7+\frac{1}{4!5!}\left(\frac{\beta_i}{2}\right)^9\xi^9-\cdots,$$

$$e^{-\beta_i\eta}=1-2\left(\frac{\beta_i}{2}\right)\eta+\frac{2^2}{2!}\left(\frac{\beta_i}{2}\right)^2\eta^2-\frac{2^3}{3!}\left(\frac{\beta_i}{2}\right)^3\eta^3+\frac{2^4}{4!}\left(\frac{\beta_i}{2}\right)^4\eta^4-\cdots.$$

Durch Einsetzung und Entwicklung nach Potenzen von η bekommen wir unter Einführung von

$$B_1=\sum_{i=1}^{n}k_i\left(\frac{\beta_i}{2}\right),\quad B_2=\sum_{i=1}^{n}k_i\left(\frac{\beta_i}{2}\right)^2,\quad B_3=\sum_{i=1}^{n}k_i\left(\frac{\beta_i}{2}\right)^3,\quad B_4=\sum_{i=1}^{n}k_i\left(\frac{\beta_i}{2}\right)^4 \quad (7),$$

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}k_i J_1(\beta_i\xi)e^{-\beta_i\eta}-\frac{\xi}{2}\sum_{i=1}^{n}k_i\beta_i\right\}=\left.\begin{aligned}&\left\{\quad -\frac{B_3}{1!2!}\xi^2+\frac{B_5}{2!3!}\xi^4-\frac{B_7}{3!4!}\xi^6+\cdots\right\}\\&-\frac{2}{1}\left\{B_2-\frac{B_4}{1!2!}\xi^2+\frac{B_6}{2!3!}\xi^4-\frac{B_8}{3!4!}\xi^6+\cdots\right\}\eta\\&+\frac{2^2}{2!}\left\{B_3-\frac{B_5}{1!2!}\xi^2+\frac{B_7}{2!3!}\xi^4-\frac{B_9}{3!4!}\xi^6+\cdots\right\}\eta^2\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \quad (8),$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} k_i\,\beta_i\,J_1(\beta_i\,\xi)\,e^{-\beta_i\eta} &= 2\sum_{i=1}^{n} k_i\left(\frac{\beta_i}{2}\right)J_1(\beta_i\,\xi)\,e^{-\beta_i\eta}\\ &= \frac{2}{1}\left\{B_2\,\xi-\frac{B_4}{1!\,2!}\,\xi^3+\frac{B_6}{2!\,3!}\,\xi^5-\cdots\right\}\\ &\quad-\frac{2^2}{1}\left\{B_3\,\xi-\frac{B_5}{1!\,2!}\,\xi^3+\frac{B_7}{2!\,3!}\,\xi^5-\cdots\right\}\eta\\ &\quad+\frac{2^3}{2!}\left\{B_4\,\xi-\frac{B_6}{1!\,2!}\,\xi^3+\frac{B_8}{2!\,3!}\,\xi^5-\cdots\right\}\eta^2\\ &\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad (9),$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} k_i\,\beta_i\,J_0(\beta_i\,\xi)\,e^{-\beta_i\eta}-\sum_{i=1}^{n}k_i\beta_i &= 2\sum_{i=1}^{n} k_i\left(\frac{\beta_i}{2}\right)J_0(\beta_i\,\xi)\,e^{-\beta_i\eta}-2\sum_{i=1}^{n}k_i\left(\frac{\beta_i}{2}\right)\\ &= 2\left\{\quad-\frac{B_3}{1^2}\,\xi^2+\frac{B_5}{(2!)^2}\,\xi^4-\frac{B_7}{(3!)^2}\,\xi^6+\cdots\right\}\\ &\quad-\frac{2^2}{1}\left\{\frac{B_2}{1}-\frac{B_4}{1^2}\,\xi^2+\frac{B_6}{(2!)^2}\,\xi^4-\frac{B_8}{(3!)^2}\,\xi^6+\cdots\right\}\eta\\ &\quad+\frac{2^3}{2!}\left\{\frac{B_3}{1}-\frac{B_5}{1^2}\,\xi^2+\frac{B_7}{(2!)^2}\,\xi^4-\frac{B_9}{(3!)^2}\,\xi^6+\cdots\right\}\eta^2\\ &\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad (10)$$

Sei:

$$\eta=-\sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_\varkappa\,\xi^{2\varkappa}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (11)$$

die Gleichung für die Kontur der Blase mit $\xi<1$ und positiven $a_\varkappa$, also $|\eta|=\sum_{\varkappa=1}^{\infty}a_\varkappa\,\xi^{2\varkappa}$

Dann gehen wir mit diesem Ausdruck für η in die Gl. (8), (9), (10) ein, quadrieren und addieren darauf die beiden letzteren. Ordnen wir nun die beiden erhaltenen Beziehungen nach Potenzen von ξ, was wegen der absoluten Konvergenz der Potenzreihen erlaubt ist, so erhalten die fundamentalen Gl. (5) und (6) die folgende Gestalt:

$$\frac{1}{2}\,\{4\,B_2\,a_1-B_3\}\,\xi^2+\frac{1}{12}\,\{B_5-12\,B_4\,a_1+24\,B_3\,a_1^2+24\,B_2\,a_2\}\,\xi^4+\cdots=0\;.\quad .\quad (12),$$

$$B_2^2\,\xi^2+\{-B_2\,B_4+4\,B_2^2\,a_1^2+B_3^2\}\,\xi^4+\cdots=\frac{1}{2}\,\{a_1\,\xi^2+a_2\,\xi^4+\cdots\}\;.\quad\ldots\ldots\quad (13).$$

Die Bestimmung der Zahlen B_2, B_3, $B_4\ldots$ erfolgt durch Vergleich der Koeffizienten von ξ in den beiden Gl. (12) und (13).

Ist a_1 beliebig gegeben, so folgt aus (13)

$$B_2^2=\frac{1}{2}\,a_1\,.$$

Mit diesem B_2 läßt sich B_3 aus (12) zu

$$B_3=4\,B_2\,a_1$$

bestimmen.

Sind B_2, B_3, a_1 bekannt, so folgt aus (13) mit beliebigen a_2

$$B_4=\frac{1}{B_2}\left\{B_3^2+4\,B_2^2\,a_1^2-4\,B_2\,B_3\,a_1+B_3^2-\frac{a_2}{2}\right\}$$

Haben wir auf diese Weise B_2, $B_3\ldots B_{n+1}$ berechnet, so bestimmen sich die k_i aus dem folgenden System von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten (siehe (7)).

$$\left.\begin{aligned}k_1\left(\frac{\beta_1}{2}\right)^2+k_2\left(\frac{\beta_2}{2}\right)^2+\ldots k_n\left(\frac{\beta_n}{2}\right)^2&=B_2\\ k_1\left(\frac{\beta_1}{2}\right)^3+k_2\left(\frac{\beta_2}{2}\right)^3+\ldots k_n\left(\frac{\beta_n}{2}\right)^3&=B_3\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\ k_1\left(\frac{\beta_1}{2}\right)^{n+1}+k_2\left(\frac{\beta_2}{2}\right)^{n+1}+\ldots k_n\left(\frac{\beta_n}{2}\right)^{n+1}&=B_{n+1}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad (14).$$

Die Determinante dieses Systems lautet bis auf einen konstanten Faktor:

$$\begin{aligned}\beta_1^2\beta_2^2\beta_3^2\dots\beta_n^2\times(\beta_1-\beta_2)(\beta_1-\beta_3)(\beta_1-\beta_4)\dots(\beta_1-\beta_n)\\(\beta_2-\beta_3)(\beta_2-\beta_4)\dots(\beta_2-\beta_n)\\(\beta_3-\beta_4)\dots(\beta_3-\beta_n)\\\dots\dots\dots\dots\\(\beta_{n-1}-\beta_n),\end{aligned}$$

die wegen $\beta_i \neq \beta_k$ für alle $i \neq k$ von Null verschieden ist. Das System (14) besitzt also eine eindeutige Lösung. Die Integrationskonstanten k_i sind also Funktionen der willkürlichen Koeffizienten a_k und lassen sich eindeutig durch (14) bestimmen, wenn die Form der Blase vorgeschrieben ist, allerdings nur in einer genügend kleinen Umgebung des Nullpunktes.

Nach dem Grenzübergang $n \to \infty$ handelt es sich um ein System von unendlich vielen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, dessen eindeutige Auflösung uns möglich erscheint. Jedenfalls wäre mit diesem Verfahren das Randwertproblem gelöst, eine Lösung der Differentialgleichung $\Delta\varphi = 0$ zu finden, so daß die Wände des Rohres Stromlinien sind, und auf einer vorgegebenen Stromlinie $\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial\eta}\right)^2=\frac{2}{\lambda^2}|\eta|$ ist, wobei noch a_1, a_2 usw., d. h. die Gestalt der Blase, vorgegeben werden kann.

Es scheint also auf den ersten Blick, als ob das Problem unbestimmt wäre. Dies ist jedoch nicht der Fall, denn von allen nach dieser Betrachtung möglichen Lösungen wird nur eine das von uns vorausgesetzte asymptotische Verhalten für $\eta \to -\infty$ zeigen. Es gilt also eine asymptotische Lösung zu suchen und sie an die Potentiallösung anzuschließen.

Der Verfasser war leider durch seine Einberufung zum Heer infolge des Kriegseintritts des rumänischen Staates gezwungen, an Stelle schärferer Rechnungen sich hierbei einer sehr rohen Methode zu bedienen, die schnell arbeitet, dabei aber doch einen brauchbaren Zahlwert für den Eigenwert λ liefert.

4. Theoretische Bestimmung des Eigenwertes. Zum Zwecke der genäherten Ermittlung des Eigenwerts λ sei der Krümmungskreis der Blase im Nullpunkt und die niedrigste asymptotische Lösung als die erste Approximationskurve der Blase betrachtet.

Sei ϱ dieser Krümmungsradius, so läßt sich die Blasenkontur durch den Kreis

$$\{\varrho-|\eta|\}^2+\xi^2=\varrho^2$$

oder, da η für $\xi \neq 0$ durchweg negativ ist, durch

$$\eta=\varrho\left(\sqrt{1-\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^2}-1\right) \qquad \xi<\varrho<1$$

in der Nähe des Nullpunktes approximieren. Die photographischen Bilder (siehe den unten folgenden experimentellen Teil) werden zeigen, daß sich in der Tat die Blasenkuppe außerordentlich gut durch einen Kreis approximieren läßt, und hierauf beruht der Erfolg dieser ersten Näherung.

Nach der Entwicklung von $\sqrt{1-\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^2}$ nach Potenzen von $\frac{\xi}{\varrho}$ hat η die folgende Gestalt:

$$\eta=-\varrho\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^4+\frac{1}{16}\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^6+\cdots\right\} \quad \dots\dots\dots (15),$$

ist also von derselben Form wie der Ansatz (11), so daß sich die unbestimmten Koeffizienten a_k als Funktionen des Krümmungsradius ϱ durch die einfachen Beziehungen

$$a_1=\frac{1}{2\varrho},\quad a_2=\frac{1}{8\varrho^3},\quad a_3=\frac{1}{16\varrho^5},\ \cdots \quad \dots\dots\dots (16)$$

darstellen lassen.

Sind die a_k festgelegt, dann lassen sich die B_k (siehe Formeln 7), sodann die k_i und schließlich λ durch das System der linearen Gl. (14) bzw. durch die Formel (3) bestimmen, wie wir in dem vorstehenden Kapitel gezeigt haben.

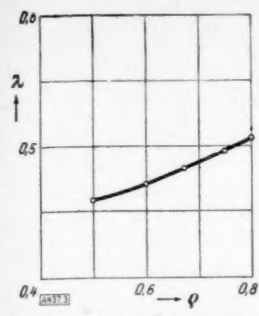


Bild 3. Der Eigenwert λ als Funktion des Krümmungsradius im Scheitel ϱ.

Zahlentafel 1 gibt die Werte von a_k, B_k, λ für verschiedene Krümmungsradien ϱ. In Bild 3 ist die Kurve $\lambda = f(\varrho)$ aufgetragen.

Zahlentafel 1. Berechnung des Eigenwertes λ als Funktion des Krümmungsradius im Scheitel ϱ.

ϱ	a_1	a_2	B_2	B_3	B_4	k_1	k_2	k_3	λ
0,5	1	1	0,707	2,828	13,435	− 0,0940	+ 0,01678	− 0,02197	0,460
0,6	0,833	0,579	0,645	2,151	8,516	− 0,0832	− 0,00839	− 0,00915	0,471
0,7	0,714	0,364	0,597	1,707	5,793	− 0,0962	− 0,01097	− 0,00423	0,488
0,8	0,625	0,244	0,559	1,397	4,148	− 0,1140	− 0,00613	− 0,00251	0,505

Um andererseits eine erste Näherung einer asymptotischen Darstellung der Kurve zu bekommen, verlangen wir, daß die Durchflußmenge $Q = \frac{\pi D^2 w_\infty}{4}$ zwischen Rohrwandung und Blase für jeden Querschnitt dieselbe ist. Macht man weiter die Annahme, daß die Geschwindigkeit im unteren Teil des Rohres nahezu senkrecht gerichtet und für jeden festen Wert von z genähert den konstanten Betrag $w = \sqrt{2gz}$ hat, dann erhält man als Ausdruck für die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\pi}{4}\left\{(2R)^2 - (2r)^2\right\}\sqrt{2gz} = \frac{\pi}{4}(2R)^2 \lambda \sqrt{gR}$$

mit R = Radius des Rohres und $w_\infty = \lambda\sqrt{gR}$ oder dimensionslos gemacht

$$\eta = \frac{\lambda^2}{2(1-\xi^2)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (17).$$

Weil λ durch das oben dargestellte Verfahren eine Funktion des Krümmungsradius ϱ ist, so entspricht jedem Krümmungskreis vom Radius ϱ, d. h. jeder Lösung in der Umgebung des Nullpunktes, eine asymptotische Lösung. Der Krümmungsradius ϱ bzw. die Dimensionslose λ ist also der Parameter einer einparametrigen Schar von Kurvenpaaren. Zur eindeutigen Bestimmung dieses Parameters λ fordern wir, daß die Kurven (15) und (17) in ihrem Schnittpunkt

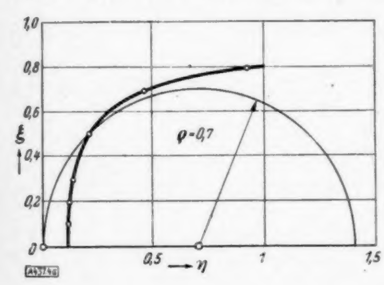
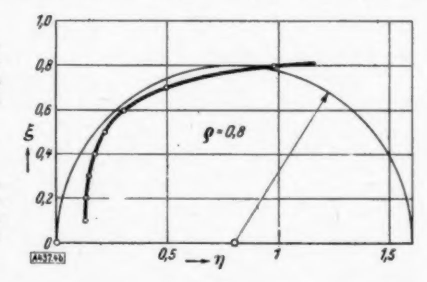


Bild 4a (links). Asymptotische Gestalt der Blase für den Krümmungsradius im Scheitel $\varrho = 0{,}7$.

Bild 4b (rechts). Asymptotische Gestalt der Blase für den Krümmungsradius im Scheitel $\varrho = 0{,}8$.



dieselben Tangenten besitzen. Die Lösung wurde für $\varrho = 0{,}5$; 0,6; 0,7 und 0,8 und die zugehörigen λ-Werte versucht. Die Bilder 4a, 4b zeigen die verschiedenen Lagen von Krümmungskreisen und entsprechenden asymptotischen Lösungen.

Wie aus den Bildern 4a und 4b zu ersehen ist, muß offenbar die Lösung zwischen $\varrho = 0{,}7$ und $\varrho = 0{,}8$ gelegen sein. Die Tangente der beiden Kurven ist durch

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{4\eta\xi}{1-\xi^2}, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\xi}{\varrho + \eta}$$

gegeben.

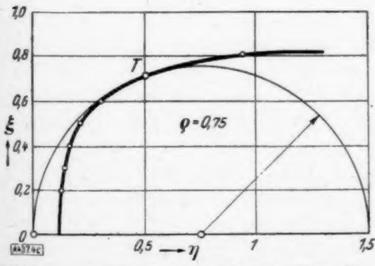


Bild 4c. Asymptotische Gestalt der Blase für den Krümmungsradius im Scheitel $\varrho = 0{,}75$.

Der Krümmungskreis $\varrho = 0{,}75$ schneidet sich mit seiner entsprechenden asymptotischen Lösung im Punkte $\xi = 0{,}71$, $\eta = 0{,}50$, und die beiden Kurven besitzen in diesem Punkte eine gemeinsame Tangente (Bild 4c). Sie bestimmen somit eindeutig die Lösung unseres vereinfachten Problems. Der entsprechende Eigenwert ist $\lambda = 0{,}496$.

III. Experimenteller Teil.

1. Versuchsanordnung. Zur Durchführung der Versuche[8]) wurden vier Glasröhren von 0,99 cm, 2 cm, 3,76 cm und 7,0 cm Durchmesser und etwa 120 cm Länge verwendet.

Die Glasröhren *d* (s. Bild 5), welche unten glatt abgeschnitten waren, besaßen am oberen Ende als Abschluß einen Dreiwegehahn. Die Röhren wurden im Beobachtungsfeld von einer Glasküvette *c* mit planparallelen Wänden umgeben, um verzerrungsfreie Aufnahmen machen zu können. Die Küvette, welche ein Blickfeld von 16 × 42 cm ermöglichte, war mit Wasser gefüllt.

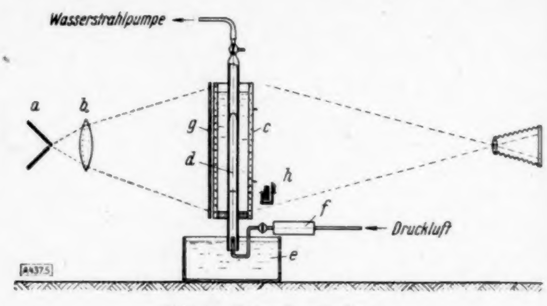


Bild 5. Versuchsanordnung.

Der Unterteil der Röhren ragte etwa 4 cm in einen mit Wasser gefüllten Behälter *e*. Die zur Bildung der Luftblase benötigte Luft wurde unter Zwischenschaltung eines Vorratsbehälters *f* aus einer Preßluftleitung entnommen und durch ein U-förmig gebogenes Glasrohr in das Versuchsrohr von unten eingeleitet. Auf diese Weise war es möglich, Luftblasen von konstanter Länge zu erzeugen.

Durchführung der Messungen. Die Aufsteigegeschwindigkeit und die Form der Blase wurden auf photographischem Wege bestimmt. Zur Beleuchtung diente eine Bogenlampe mit Kondensor, deren Licht auf eine an der Glasküvette befestigte Mattscheibe *g* fiel. Die Mattscheibe war nötig, um ein gleichmäßiges diffuses Licht zu erhalten. Außerdem wurden Versuche zur Belichtung mit elektrischen Funken gemacht, die jedoch zu keinen befriedigenden Ergebnissen führten. Als Aufnahmeapparat diente die Leica III A, welche Belichtungszeiten bis $^1/_{1000}$ Sekunde und rasche Bildfolge zuließ.

Zur Zeitregistrierung wurde ein Synchronmotor *h* verwendet, auf dessen Achse ein Zeiger befestigt war, der in 0,6 Sekunden eine volle Umdrehung machte. Der Zeiger wurde mit einer zweiten Bogenlampe angestrahlt. Im Inneren der Küvette nahe dem Versuchsrohr waren zwei Marken im Abstand von 10 cm als Maßstab angebracht und außerdem zwei Paßmarken außen an der Küvette. Zur Durchführung eines Versuches wurde das Versuchsrohr, nachdem es genau senkrecht ausgerichtet war, mit Hilfe einer Wasserstrahlpumpe aus dem Behälter luftfrei mit Wasser gefüllt. Anschließend wurde Preßluft in den Vorratsbehälter eingeleitet und dieser abgesperrt.

Nachdem der Synchronmotor angeworfen war, wurde der Absperrhahn rasch geöffnet, so daß die Preßluft durch das U-Rohr in das Versuchsrohr einströmen konnte und hier die Blase erzeugte. Sobald die Blase im Blickfeld der Kamera erschien, wurde die erste und kurz vor Verlassen des Blickfeldes die zweite Aufnahme mit je $^1/_{1000}$ Sekunde Belichtungszeit gemacht. Für die Bestimmung der Form der Blase wurde der Apparat nähergebracht, um eine größere Abbildung zu bekommen.

Auswertung. Ausgewertet wurden die Aufnahmen in einem Vergrößerungsapparat. Es wurden auf einem Blatt Papier die Kuppe der Blase, die Zeigerstellung der Zeituhr und die Paßmarken eingezeichnet. Dann wurden die Paßmarken der zweiten Aufnahme mit denen der ersten zur Deckung gebracht und hier ebenfalls Blasenkuppe und Zeigerstellungen eingezeichnet. Außerdem wurde der Maßstab markiert. Nun wurde die Strecke zwischen der Blasenkuppe der ersten und zweiten Aufnahme gemessen und durch die Länge des Maßstabes dividiert und so die wirkliche Länge erhalten. Ebenso wurde der Winkel zwischen der ersten und der zweiten Zeigerstellung der Uhr gemessen und auf diese Weise die Zeit festgestellt, die zwischen den beiden Aufnahmen verstrichen war.

Um einen Irrtum um ganze Zeigerumdrehungen zu vermeiden, wurde die Zeit außerdem mit einer Stoppuhr festgehalten. Aus dem zurückgelegten Weg der Blase und der verstrichenen Zeit wurde die Aufsteigegeschwindigkeit der Blase bestimmt.

2. Ergebnisse und Vergleich mit der Theorie. Die Versuche haben bestätigt, daß die Aufsteigegeschwindigkeit der Blase bei den weiten Rohren proportional der Wurzel aus dem Radius R des Rohres und die Schwerebeschleunigung g ist, wie sich im ersten Teil dieser

[8]) Durch die Kriegslage war ich genötigt, die Versuche im Physikalischen Institut Göttingen auszuführen. Herrn Professor Dr. R. W. Pohl, der mir die Möglichkeit hierzu gegeben hat, bin ich zu großem Dank verpflichtet.

Zahlentafel 2a.

Geschwindigkeitsmessungen im Rohr mit $D=0{,}99$ cm.

$D=0{,}99$ cm			$w_m=6{,}316$ cm/sec			
Nr.	l	t_1	t_2 sec	T sec	L cm	w cm/sec
1	226	0,331	0,198	4,398	27,39	6,227
2	236,2	0,609	0,365	4,562	28,63	6,271
3	238,7	0,675	0,405	4,605	28,93	6,282
4	245,5	0,872	0,523	4,723	29,75	6,298
5	247,0	0,917	0,550	4,755	29,94	6,296
6	251,4	0,037	0,0222	4,822	30,47	6,318
7	252,3	0,063	0,0378	4,837	30,58	6,322
8	253,4	0,085	0,051	4,851	30,71	6,330
9	263,5	0,370	0,222	5,022	31,94	6,360
10	263,2	0,360	0,216	5,016	31,90	6,360
11	266,4	0,459	0,275	5,075	32,29	6,362
12	267,2	0,471	0,283	5,083	32,38	6,370

Zahlentafel 2b.

Geschwindigkeitsmessungen im Rohr mit $D=2{,}0$ cm.

$D=2{,}0$ cm			$w_m=14{,}85$ cm/sec			
Nr.	l	t_1	t_2 sec	T sec	L cm	w cm/sec
1	176,8	0,396	0,237	1,437	214,30	14,91
2	185,2	0,514	0,308	1,508	224,48	14,88
3	195,5	0,67	0,402	1,602	236,96	14,79
4	196,0	0,67	0,402	1,602	237,57	14,83
5	205,0	0,78	0,468	1,668	248,48	14,89
6	213,8	0,927	0,556	1,756	259,15	14,76
7	222,2	0,018	0,0108	1,8108	269,33	14,87
8	226,8	0,081	0,0486	1,8486	274,90	14,87
9	230,1	0,123	0,0738	1,873	278,90	14,88
10	240,6	0,274	0,164	1,964	291,63	14,85
11	244,2	0,319	0,191	1,991	296,0	14,86

Es bedeuten:

D	Durchmesser des Rohres (cm),
l	Scheitelabstand der beiden Blasenaufnahmen in der Vergrößerung (mm). Die wahre Länge für 100 mm ist $82{,}5=m$,
t_1	Zeigerstellung der Uhr (Bruchteile der vollen Umdrehung),
$t_2=0{,}6\,t_1$	Zeitintervall, das t_1 entspricht (sec),
$T_2=t+n\,0{,}6$	Zeit zwischen den beiden Aufnahmen (sec) (n, Anzahl der vollen Umdrehungen des Uhrzeigers),
$L=l/m$	von der Blase in der Zeit T zurückgelegte Strecke (cm),
$w=L/T$	Steiggeschwindigkeit der Blase (cm/sec),
w_m	Mittelwert der Aufsteiggeschwindigkeit der Blase.

Zahlentafel 2c.

Geschwindigkeitsmessungen im Rohr mit $D=3{,}76$ cm.

$D=3{,}76$ cm			$w_m=21{,}22$ cm/sec			
Nr.	l	t_1	t_2 sec	T sec	L cm	w cm/sec
1	158,2	0,746	0,447	1,048	22,187	21,17
2	163,7	0,817	0,490	1,090	22,959	21,06
3	177,5	0,960	0,576	1,176	24,894	21,17
4	179,0	0,974	0,584	1,184	25,105	21,20
5	179,3	0,973	0,584	1,184	25,147	21,24
6	181,2	0,0	0,0	1,200	25,413	21,18
7	187,0	0,050	0,030	1,230	26,227	21,32
8	192,2	0,120	0,072	1,272	26,956	21,19
9	205,8	0,270	0,162	1,362	28,863	21,19
10	215,0	0,362	0,217	1,417	30,154	21,28
11	218,5	0,385	0,231	1,431	30,645	21,41

Zahlentafel 2d.

Geschwindigkeitsmessungen im Rohr mit $D=7{,}0$ cm.

$D=7{,}0$ cm			$w_m=28{,}64$ cm/sec			
Nr.	l	t_1	t_2 sec	T sec	L cm	w cm/sec
1	179,8	0,271	0,162	0,762	21,793	28,59
2	213,5	0,500	0,300	0,900	25,878	28,75
3	214,3	0,522	0,313	0,913	25,975	28,45
4	216,7	0,535	0,321	0,921	26,266	28,52
5	223,7	0,585	0,348	0,948	27,115	28,60
6	224,2	0,584	0,350	0,950	27,175	28,60
7	225,7	0,585	0,351	0,951	27,357	28,76
8	226,2	0,581	0,348	0,948	27,418	28,92
9	226,5	0,602	0,361	0,961	27,454	28,57
10	228,3	6,622	0,373	0,973	27,672	28,44
11	241,1	0,690	0,414	1,014	27,224	28,82
12	246,4	0,738	0,439	1,039	29,866	28,74
13	256,7	0,812	0,487	1,087	31,115	28,62
14	256,8	0,816	0,489	1,089	31,127	28,58

ξ	η	ξ	η
0	0	0,784	— 0,827
0,268	— 0,051	0,820	— 1,033
0,372	— 0,103	0,859	— 1,550
0,503	— 0,207	0,878	— 2,070
0,653	— 0,413	0,889	— 2,580
0,735	— 0,620		

Zahlentafel 3 (links). Mittelwerte der dimensionslosen Abszissen ξ und Ordinaten η nach den Messungen.

Zahlentafel 4 (rechts). Die Werte des gemessenen Eigenwertes λ als Funktion des Durchmessers des Rohres und der dimensionslosen Zahl $P=D\sqrt{\frac{g\,\delta}{C}}$

λ	D cm	P
0,28	0,99	3,70
0,47	2,00	7,48
0,49	3,76	14,06
0,49	7,00	26,18

Arbeit durch Dimensionsbetrachtung ergeben hat. Die Länge der Blase war ohne Einfluß. Bei den engeren Rohren bewirken Kapillarkräfte eine Verringung der Aufstieggeschwindigkeit. Die Zahlentafeln 2a bis d geben die direkten Messungen wieder sowie ihre Auswertung nach dem im zweiten Kapitel angegebenen Verfahren. Die Form der Blase ist aus den Bildern 6 und 7 zu ersehen. Die Bilder 6a, b, c, d stellen die Röhre in halber Größe dar; die Bilder 7a, b, c, d dieselben Röhren auf gleichen Maßstab gebracht.

Die Form der Blase ist fast genau dieselbe für alle vier verschiedenen Röhren. Für das Rohr mit 0,99 cm Durchmesser hat die Blase eine spitzere Kuppe, was vermutlich dem hier bereits merklichen Einfluß der Kapillarkräfte zuzuschreiben ist[9]). Die Zahlentafel 3 gibt die Mittelwerte der dimensionslosen Abszissen η und Ordinaten ξ der Blasen a und b. Die Werte des gemessenen Eigenwertes λ als Funktion der dem Durchmesser des Rohres D proportionalen dimensionslosen Zahl[10])



Bild 6. Blasen, in halber Größe wiedergegeben.



Bild 7. Dieselben Blasen wie in Bild 6, jedoch auf gleichen Maßstab gebracht.

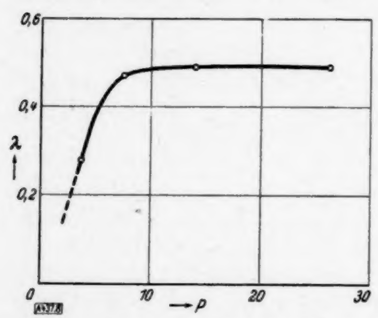


Bild 8. Die Werte des gemessenen Eigenwertes λ als Funktion der dimensionslosen Zahl $P = D\sqrt{\frac{g\delta}{C}}$.

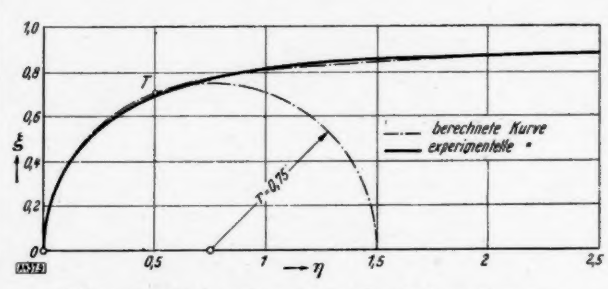


Bild 9. Berechnete und experimentell gefundene Blasenform.

$P = D\sqrt{\frac{g\delta}{C}}$ (D = Durchmesser des Rohres, $g = 981$ cm/sec Erdbeschleunigung, $\delta \approx 1$ gr/cm³ Dichte des Wassers und $C = 70$ dyn/cm Kapillarkonstante) sind in Bild 8 aufgetragen (Zahlentafel 4). Der Einfluß der Kapillar- und Zähigkeitskräfte macht sich bis zu einem Durchmesser $D \approx 3$ cm bemerkbar. Von hier an strebt λ asymptotisch gegen den Wert $\lambda \approx 0{,}5$ in guter Übereinstimmung mit unserem theoretisch gefundenen Wert $\lambda = 0{,}496$, den wir ohne Berücksichtigung der Kapillar- und Zähigkeitskräfte gefunden haben.

Die experimentelle und die gerechnete Näherung der theoretischen Form der Blase ist in Bild 9 ausgezogen bzw. gestrichelt dargestellt. Der Berührungspunkt des Krümmungskreises und der asymptotischen Lösung liegt bei $\xi = 0{,}71$, $\eta = 0{,}50$.

Wie bereits oben erwähnt, beruht der Erfolg dieser Methode, welche uns nur die erste Näherung des Eigenwertes λ lieferte, auf der Tatsache, daß sich die Blasenkuppe in der Umgebung des Nullpunktes sehr gut durch einen Kreis approximieren läßt (für alle $\xi < 0{,}6$, $\eta < 0{,}3$).

Wegen der geringen Abweichungen der experimentellen von der theoretischen Kurve lohnt sich der große Aufwand nicht, die erste Näherung durch eine zweite weiter zu verbessern.

[9]) Möglicherweise ist auch die Wirkung des Glasrohrs als Zylinderlinse mit im Spiel, die bei dem engsten Rohr sich am stärksten bemerklich macht.

[10]) Vgl. z. B. L. Prandtl: Führer durch die Strömungslehre, III. Aufl. Braunschweig 1942, 1. Abschnitt, § 11.

IV. Zusammenfassung.

Die Aufgabe, die Form und die Aufsteiggeschwindigkeit einer unendlich langen Luftblase, die in einem vertikalen flüssigkeitsgefüllten Kreisrohr aufsteigt, zu finden, führt unter Vernachlässigung der Kapillar- und Zähigkeitskräfte zur Lösung der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung $\Delta\varphi = 0$ für das Geschwindigkeitspotential unter einer besonderen Grenzbedingung.

Zunächst wurde durch Dimensionsbetrachtungen gezeigt, daß die Aufsteiggeschwindigkeit der Blase $w = \lambda\sqrt{gR}$ ist, wo g die Erdbeschleunigung, R der Radius des Rohres und λ eine dimensionslose Konstante bedeutet.

Die Lösung dieser achsensymmetrischen Strömung ist mit ξ und η als mit R dimensionslos gemachten Koordinaten durch die Ausdrücke

$$\varphi = -\eta + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} k_i J_0(\beta_i \xi)\, e^{-\beta_i \eta} \quad \text{und} \quad \psi = \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} k_i J_1(\beta_i \xi)\, e^{-\beta_i \eta}$$

gegeben, welche durch die Bedingung $J_1(\beta_i) = 0$ die erste Randbedingung, wonach die Wände des Rohres Stromlinien sein sollen, von selbst erfüllen. Die zweite Randbedingung, daß auf einer noch nicht bekannten Stromlinie $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2}|\eta|$ sein soll, wurde in folgender Weise gelöst. Die unbekannte Form der Blase wurde in der Nähe des Nullpunktes durch ihren entsprechenden Krümmungskreis dargestellt. Die Reihenentwicklung dieses Kreises $\eta = \sum_{k=1}^{n} a_k \xi^{2k}$ wurde in die Stromfunktion sowie in den Ausdruck $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2}|\eta|$ eingesetzt und auf Grund einiger Rechnungen wurden die Integrationskonstanten k_i als Funktion des Kreisradius bestimmt. Der Eigenwert λ läßt sich durch die Formel $\lambda = -\sum_{i=1}^{n} k_i \beta_i$ auch unmittelbar als Funktion des Kreisradius darstellen.

Die dimensionslose Konstante λ (Eigenwert des Problems) wurde dann durch die Forderung bestimmt, daß die asymptotische Lösung mit stetiger Tangente in den ihr zugeordneten Krümmungskreis übergehen muß.

Der theoretisch bestimmte Wert $\lambda = 0{,}496$ stimmt mit dem durch die Versuche gefundenen Wert $\lambda = 0{,}49$, ebenso die theoretische und die experimentelle Kurve der Blase gut überein. 437

Über die Stabilität der Lösungen Hillscher Differentialgleichungen mit drei unabhängigen Parametern.

Erste Mitteilung:

Über die Gleichung $y'' + (\lambda + \gamma_1 \cos x + \gamma_2 \cos 2x)\, y = 0$.

Von *Karl Klotter* und *Gertrud Kotowski* in Berlin.

(Mitteilung aus dem Vierjahresplan-Institut für Schwingungsforschung, Berlin.)

Das Stabilitätsverhalten der Lösungen der genannten Differentialgleichung wird dadurch untersucht, daß der Stabilitätskörper im λ-γ_1-γ_2-Raum bestimmt wird. Zur Darstellung dienen Schnitte $\gamma_2 = const$ durch diesen Körper. Der Schnitt $\gamma_2 = 0$ stellt die „Struttsche Karte" für die Mathieusche Differentialgleichung dar.

1. Einleitung.

Seit den Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten eine immer größere Bedeutung auch bei den technischen Anwendungen zukommt [1][1]), ist die Gewinnung systematischer numerischer Ergebnisse (z. B. die Tabulierung zusammengehöriger Werte für die Parameter der Differentialgleichung, die die Grenzen der stabilen und instabilen Gebiete der Lösungen bezeichnen) zu einem dringenden Bedürfnis geworden. Denn die Durchführung der Rechnungen ist, selbst wenn, wie bei der Hillschen oder Mathieuschen Differentialgleichung, die Methode zur Bestimmung der Lösungen längst klargestellt ist, im allgemeinen recht zeit-

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Schrifttumverzeichnis am Schluß der Arbeit.

raubend, so daß für eine Benutzung Zahlenmaterial bereitgestellt werden muß. Das vorhandene numerische Material ist aber leider noch sehr lückenhaft. Soweit uns bekannt ist, sind numerische Untersuchungen systematischer Art bis jetzt nur für folgende zweiparametrige Differentialgleichungen durchgeführt worden:

a) die Mathieusche Differentialgleichung [2], [4]

$$y'' + (\lambda + \gamma \cos x)\, y = 0,$$

b) die Meißnersche Differentialgleichung [3]

$$y'' + (\lambda \pm \gamma)\, y = 0,$$

c) die spezielle Hillsche Differentialgleichung [4]

$$y''\,(\lambda + \gamma \cos x) + \frac{\lambda^2}{4}\, y = 0.$$

Die Rechnungen in [2] sind dabei die ausführlichsten; sie enthalten außer den Tabellen für die Wertepaare λ und γ der Grenzkurven auch Tabellen für die Fourierkoeffizienten der Mathieuschen Funktionen erster Art und für diese Funktionen selber.

2. Aufgabenstellung.

Die hier vorliegende Arbeit soll einen Beitrag darstellen zur Bereitstellung des wichtigsten Zahlenmaterials. Es wurde der Einfluß eines dritten unabhängigen Parameters in der Hillschen Differentialgleichung auf die Stabilität der Lösungen untersucht. Die hier behandelte spezielle Hillsche Differentialgleichung lautet

$$y'' + (\lambda + \gamma_1 \cos x + \gamma_2 \cos 2x)\, y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Berechnet wurden für die Werte

$$\gamma_1 = 0;\ 0{,}5;\ 1{,}0 \text{ und } 1{,}5$$

und

$$\gamma_2 = \pm 0{,}1;\ \pm 0{,}2;\ \pm 0{,}3;\ \pm 0{,}4 \text{ und } \pm 0{,}5$$

die Grenzkurven

$$C_0,\ C_{1/2},\ S_{1/2},\ C_1 \text{ und } S_1$$

(in der Bezeichnungsweise des Aufsatzes [1]).

Trägt man die Parameter λ, γ_1, γ_2 in einem dreiachsigen kartesischen Koordinatensystem auf, so erhält man den „Stabilitätskörper". Zusammengehörige Werte der drei Parameter, die die Grenzen zwischen den Bereichen stabiler und instabiler Lösungen bezeichnen, bilden Flächen in diesem Stabilitätskörper. Wir wählen zur Darstellung Schnitte durch den Körper, die parallel zur λ-γ_1-Ebene sind, also γ_2 als Parameter haben; in diesem Sinne sprechen wir von Grenzkurven statt von Grenzflächen. Die bekannte „Struttsche Karte", die über die Stabilität der Lösungen der Mathieuschen Differentialgleichung Auskunft gibt, ist also der Schnitt durch den Körper der λ-, γ_1-, γ_2-Werte für $\gamma_2 = 0$.

Über die Stabilitätsverhältnisse anderer Hillscher Differentialgleichungen von ähnlicher Bauart, z. B. der Gleichung

$$y'' + (\lambda + \gamma_1 \cos x + \gamma_2 \sin 2x)\, y = 0$$

soll in weiteren Mitteilungen berichtet werden.

3. Rechnungsgang.

Da die Belegungsfunktion $(\lambda + \gamma_1 \cos x + \gamma_2 \cos 2x)$ beschränkt ist, kann man die Hillsche Lösungsmethode anwenden. Zu den Grenzkurven gehören periodische Fundamentallösungen von der Form (n sei eine ganze, positive Zahl)

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha) \text{ für die } C_n\text{-Kurven:} && y = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu \cos \nu x\\
&\beta) \text{ für die } S_n\text{-Kurven:} && y = \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu \sin \nu x\\
&\gamma) \text{ für die } C_{\frac{2n+1}{2}}\text{-Kurven:} && y = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\frac{2\nu+1}{2}} \cos \frac{2\nu+1}{2} x\\
&\delta) \text{ für die } S_{\frac{2n+1}{2}}\text{-Kurven:} && y = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_{\frac{2\nu+1}{2}} \sin \frac{2\nu+1}{2} x
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Die unendlichen Systeme algebraischer Gleichungen, die man zur Bestimmung ihrer Fourierkoeffizienten A und B erhält, stehen auf Formelblatt 1 (Gln. (3)).

Formelblatt 1.

α) für die C_n-Kurven

$$\lambda A_0 + \frac{\gamma_1}{2} A_1 + \frac{\gamma_2}{2} A_2 = 0$$

$$\gamma_1 A_0 + \left(\lambda - 1 + \frac{\gamma_2}{2}\right) A_1 + \frac{\gamma_1}{2} A_2 + \frac{\gamma_2}{2} A_3 = 0$$

$$\gamma_2 A_0 + \frac{\gamma_1}{2} A_1 + (\lambda - 4) A_2 + \frac{\gamma_1}{2} A_3 + \frac{\gamma_2}{2} A_4 = 0$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$(\lambda - k^2) A_k + \frac{\gamma_1}{2} (A_{k-1} + A_{k+1}) + \frac{\gamma_2}{2} (A_{k-2} + A_{k+2}) = 0$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

β) für die S_n-Kurven

$$\left[\lambda - 1 - \frac{\gamma_2}{2}\right] B_1 + \frac{\gamma_1}{2} B_2 + \frac{\gamma_2}{2} B_3 = 0$$

$$\frac{\gamma_1}{2} B_1 + (\lambda - 4) B_2 + \frac{\gamma_1}{2} B_3 + \frac{\gamma_2}{2} B_4 = 0$$

$$\frac{\gamma_2}{2} B_1 + \frac{\gamma_1}{2} B_2 + (\lambda - 9) B_3 + \frac{\gamma_1}{2} B_4 + \frac{\gamma_2}{2} B_5 = 0$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$(\lambda - k^2) B_k + \frac{\gamma_1}{2} [B_{k-1} + B_{k+1}] + \frac{\gamma_2}{2} [B_{k-2} + B_{k+2}] = 0$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

γ) für die $C_{\frac{2n+1}{2}}$-Kurven

$$\left[\lambda - \frac{1}{4} + \frac{\gamma_1}{2}\right] A_{1/2} + \left[\frac{\gamma_1}{2} + \frac{\gamma_2}{2}\right] A_{3/2} + \frac{\gamma_3}{2} A_{5/2} = 0$$

$$\left[\frac{\gamma_1}{2} + \frac{\gamma_2}{2}\right] A_{1/2} + \left[\lambda - \frac{9}{4}\right] A_{3/2} + \frac{\gamma_1}{2} A_{5/2} + \frac{\gamma_2}{2} A_{7/2} = 0$$

$$\frac{\gamma_2}{2} A_{1/2} + \frac{\gamma_1}{2} A_{3/2} + \left[\lambda - \frac{25}{4}\right] A_{5/2} + \frac{\gamma_1}{2} A_{7/2} + \frac{\gamma_2}{2} A_{9/2} = 0$$

— —

$$\left[\lambda - \left(\frac{2k+1}{2}\right)^2\right] A_{\frac{2k+1}{2}} + \frac{\gamma_1}{2} \left[A_{\frac{2k-1}{2}} + A_{\frac{2k+3}{2}}\right] + \frac{\gamma_2}{2} \left[A_{\frac{2k-3}{2}} + A_{\frac{2k+5}{2}}\right] = 0$$

— —

δ) für die $S_{\frac{2n+1}{2}}$-Kurven

$$\left[\lambda - \frac{1}{4} - \frac{\gamma_1}{2}\right] B_{1/2} + \left[\frac{\gamma_1}{2} - \frac{\gamma_2}{2}\right] B_{3/2} + \frac{\gamma_2}{2} B_{5/2} = 0$$

$$\left[\frac{\gamma_1}{2} - \frac{\gamma_2}{2}\right] B_{1/2} + \left[\lambda - \frac{9}{4}\right] B_{3/2} + \frac{\gamma_1}{2} B_{5/2} + \frac{\gamma_2}{2} B_{7/2} = 0$$

$$\frac{\gamma_2}{2} B_{1/2} + \frac{\gamma_1}{2} B_{3/2} + \left[\lambda - \frac{25}{4}\right] B_{5/2} + \frac{\gamma_1}{2} B_{7/2} + \frac{\gamma_2}{2} B_{9/2} = 0$$

— —

$$\left[\lambda - \left(\frac{2k+1}{2}\right)^2\right] B_{\frac{2k+1}{2}} + \frac{\gamma_1}{2} \left[B_{\frac{2k-1}{2}} + B_{\frac{2k+3}{2}}\right] + \frac{\gamma_2}{2} \left[B_{\frac{2k-3}{2}} + B_{\frac{2k+5}{2}}\right] = 0$$

— —

. . . (3).

Die gleich Null gesetzten Determinanten dieser Gleichungssysteme (3) geben die Gleichungen

$$C_n(\lambda, \gamma_1, \gamma_2) = 0, \qquad S_n(\lambda, \gamma_1, \gamma_2) = 0,$$

$$C_{\frac{2n+1}{2}}(\lambda, \gamma_1, \gamma_2) = 0 \quad \text{und} \quad S_{\frac{2n+1}{2}}(\lambda, \gamma_1, \gamma_2) = 0$$

der Grenzkurven. Aus diesen Gleichungen erkennt man, daß (genau wie bei der Mathieuschen Differentialgleichung) die Funktionen C_n und S_n gerade Funktionen hinsichtlich des Wertes γ_1 sind, während die Funktionen $C_{\frac{2n+1}{2}}$ und $S_{\frac{2n+1}{2}}$ bei einem Wechsel des Vorzeichens von γ_1 ihre Rollen vertauschen. Wir brauchen deshalb die Rechnungen nur für positive Werte von γ_1 durchzuführen.

Für die explizite Berechnung der zu den Grenzkurven gehörenden Wertetripel λ, γ_1, γ_2 wurden jedoch nicht die sich aus dem Nullsetzen der Systemdeterminanten ergebenden Gleichungen unmittelbar herangezogen, sondern es wurde ein Annäherungsverfahren angewendet, wie es auch von F. Kluge [5, S. 135] benutzt wurde. Die Gleichungssysteme (3) wurden hierbei jeweils nach der fünften Gleichung abgebrochen. So entstehen Systeme von jeweils fünf homogenen Gleichungen mit fünf Unbekannten. Eine der Unbekannten — hier stets die letzte — wurde zu Eins normiert. Das Gleichungssystem wird dadurch zu einem inhomogenen System für vier Unbekannte; eine Gleichung ist überzählig; sie dient als „Fehlergleichung". Im folgenden wurde stets die erste Gleichung als Fehlergleichung benutzt. Für die Größen γ_1 und γ_2 wurden die in Abschnitt 2 genannten Wertepaare eingesetzt; für die eigentlich gesuchte, bei diesem Annäherungsverfahren gleichfalls als Parameter behandelte Größe λ wurden Annäherungswerte eingesetzt, die nach folgendem Gesichtspunkt aufgesucht wurden: Da die Werte λ für die gewählten Werte von γ_1 bei dem Wert $\gamma_2 = 0$ aus den Inceschen Rechnungen [2] bekannt sind, so wählten wir in der Nähe dieser Werte λ die Annäherungswerte für $\gamma_2 = \pm 0{,}1$; in der Nähe der so erhaltenen Werte λ wieder die Annäherungswerte für $\gamma_2 = \pm 0{,}2$ usw.

Das folgende Beispiel zeigt die Bestimmung von λ für das Wertepaar $\gamma_1 = 1{,}5$ und $\gamma_2 = 0{,}5$ der Grenzkurve $S_1 = 0$ nach diesem Verfahren. Das inhomogene Gleichungssystem lautet

$$\left.\begin{aligned} 0{,}25\,B_3 + 0{,}75\,B_4 &= 25 - \lambda \\ +0{,}25\,B_2 + 0{,}75\,B_3 + (\lambda - 16)\,B_4 &= -0{,}75 \\ 0{,}25\,B_1 + 0{,}75\,B_2 + (\lambda - 9)\,B_3 + 0{,}75\,B_4 &= -0{,}25 \\ 0{,}75\,B_1 + (\lambda - 4)\,B_2 + 0{,}75\,B_3 + 0{,}25\,B_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (4\text{a})$$

und die „Fehlergleichung"

$$(\lambda - 1{,}25)\,B_1 + 0{,}75\,B_2 + 0{,}25\,B_3 = f \quad \ldots \ldots \ldots (4\text{b}).$$

Als angenäherte Werte λ setzen wir hierin (da das zu $\gamma_1 = 1{,}5$ und $\gamma_2 = 0{,}4$ gehörige λ den Wert 0,99 hatte, und mit wachsendem γ_2 die λ-Werte größer werden, und zwar um ungefähr 0,04 für einen Zuwachs in γ_2 von 0,1):

$$\lambda = 1{,}03;\; 1{,}04 \text{ und } 1{,}05$$

Dazu gehören die folgenden Fehlerwerte f nach (4 b)

λ	1,03	1,04	1,05
f	− 6,0076	+ 6,9495	+ 19,8203

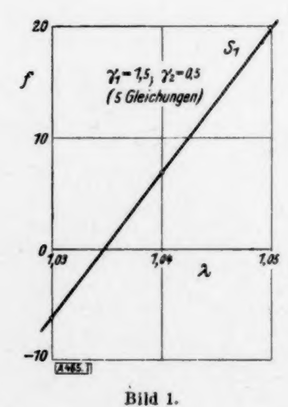


Bild 1.

In Bild 1 ist die „Fehlergerade" $f(\lambda)$ eingezeichnet; ihr Schnittpunkt mit der λ-Achse liegt bei $\lambda = 1{,}0346$.

Um die Güte der so erzielten Annäherung zu erkennen, wurde für den höchsten γ_1-Wert und die beiden dem Betrage nach höchsten γ_2-Werte, also für $\gamma_1 = 1{,}5$ und $\gamma_2 = \pm 0{,}4$; $\pm 0{,}5$ der Wert von λ auch aus einem System von sechs Gleichungen ermittelt. In der Zahlentafel 1 sind jeweils in der Spalte λ_5 diejenigen Werte von λ aufgezeichnet, die sich bei Benutzung von fünf Gleichungen, in der Spalte λ_6 jene, die sich bei Benutzung von sechs Gleichungen ergaben. Wie man aus der Zahlentafel 1 ersieht, ist die dritte Stelle nach dem Komma noch als sicher zu betrachten. Bezüglich der Rechengenauigkeit bemerken wir: Im

Zahlentafel 1.

a) $\gamma_1 = 1,5$; $\gamma_2 = 0,4$

	C_0	$C_{1/2}$	$S_{1/2}$	S_1	C_1
λ_5	— 0,8310	— 0,8217	0,7518	0,9934	1,4468
λ_6	— 0,8305	— 0,8217	0,7518	0,9933	1,4468

b) $\gamma_1 = 1,5$; $\gamma_2 = 0,5$

	C_0	$C_{1/2}$	$S_{1/2}$	S_1	C_1
λ_5	— 0,8660	— 0,8580	0,7775	1,0345	1,4277
λ_6	— 0,8659	— 0,8580	0,7777	1,0346	1,4277

c) $\gamma_1 = 1,5$; $\gamma_2 = -0,4$

	C_0	$C_{1/2}$	$S_{1/2}$	S_1	C_1
λ_5	— 0,6232	— 0,6065	0,4813	0,6326	1,5626
λ_6	— 0,6233	— 0,6065	0,4815	0,6327	1,5624

d) $\gamma_1 = 1,5$; $\gamma_2 = -0,5$

	C_0	$C_{1/2}$	$S_{1/2}$	S_1	C_1
λ_5	— 0,6085	— 0,5904	0,4411	0,5843	1,5740
λ_6	— 0,6085	— 0,5904	0,4411	0,5842	1,5740

Verlauf der Rechnung (auf der Rechenmaschine) wurden sämtliche Zahlenwerte bis auf die sechste Stelle nach dem Komma mitgenommen. Das Resultat wurde auf die vierte Stelle nach dem Komma gekürzt. In den Fehlerdiagrammen (nach Bild 1) wurde der Maßstab für λ so gewählt, daß der Wert 0,01 durch eine Strecke von mindestens 5 cm Länge dargestellt wurde, so daß stets die dritte Stelle nach dem Komma noch genau und die vierte Stelle geschätzt abgelesen werden konnte.

4. Ergebnisse und ihre Erörterung.

Die auf die oben beschriebene Weise erzielten Ergebnisse stehen in den Zahlentafeln 2 und 3. Die Bilder 2a bis c zeigen Photographien nach einem Modell des Stabilitätskörpers.

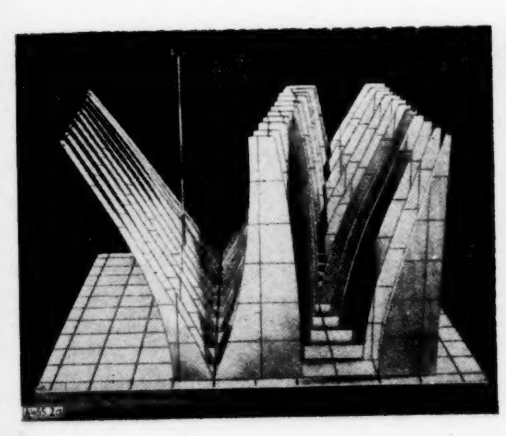


Bild 2a.

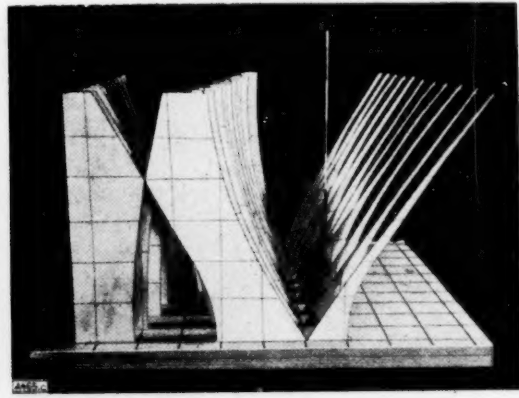


Bild 2c.

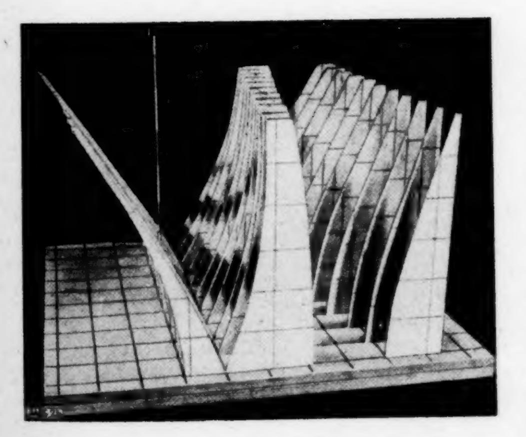


Bild 2b.

In Bild 3 und Bild 4 sind je zwei Schnitte durch diesen Körper parallel zur λ-γ_1-Ebene, und zwar für $\gamma_2 = 0$ (übliche Struttsche Karte) und $\gamma_2 = 0,5$ bzw. $\gamma_2 = -0,5$ übereinander gezeichnet. Die Schnitte für die dazwischenliegenden Werte von γ_2 zeigen ein entsprechendes Verhalten, das sich mit größer werdendem $|\gamma_2|$ immer deutlicher ausprägt. Bemerkenswert an Bild 3 ist die Überschneidung der Kurven C_1 und S_1 bei positiven Werten von γ_2. Der Schnittpunkt der beiden Kurven wandert mit wachsendem γ_2 von $\gamma_1 = 0$ (wo er für $\gamma_2 = 0$ liegt) nach höheren Werten von γ_1. Bild 4 dagegen zeigt, daß für negatives γ_2 überhaupt kein Schnittpunkt der Kurven C_1 und S_1 auftritt; diese Kurven rücken vielmehr mit wachsendem $|\gamma_2|$ immer weiter auseinander.

Z. angew. Math. Mech. Bd. 23 Nr. 3 Juni 1943

Zahlentafel 2. λ-Werte der Grenzkurven.

Kurve	γ_1 \ γ_2	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
C_0	0,0	0,0000	−0,0013	−0,0051	−0,0112	−0,0199	−0,0311
	0,5	−0,1138	−0,1224	−0,1338	−0,1480	−0,1650	−0,1840
	1,0	−0,3785	−0,3940	−0,4172	−0,4425	−0,4701	−0,5000
	1,5	−0,7086	−0,7359	−0,7650	−0,7960	−0,8310	−0,8660
$C_{1/2}$	0,0	0,2500	0,2482	0,2436	0,2354	0,2236	0,2088
	0,5	−0,0276	−0,0398	−0,0562	−0,0748	−0,0962	−0,1203
	1,0	−0,3477	−0,3691	−0,3931	−0,4498	−0,4486	−0,4795
	1,5	−0,6964	−0,7246	−0,7550	−0,7875	−0,8217	−0,8580
$S_{1/2}$	0,0	0,2500	0,2482	0,2436	0,2354	0,2236	0,2088
	0,5	0,4648	0,4764	0,4848	0,4896	0,4911	0,4892
	1,0	0,5948	0,6192	0,6411	0,6602	0,6763	0,6892
	1,5	0,6298	0,6631	0,6947	0,7242	0,7518	0,7775
C_1	0,0	1,0000	0,9497	0,8987	0,8472	0,7951	0,7424
	0,5	1,0928	1,0510	1,0088	0,9662	0,9232	0,8802
	1,0	1,2932	1,2656	1,2369	1,2079	1,1778	1,1533
	1,5	1,5113	1,4969	1,4814	1,4656	1,4468	1,4277
S_1	0,0	1,0000	1,0497	1,0988	1,1472	1,1949	1,2419
	0,5	0,9793	1,0283	1,0767	1,1245	1,1716	1,2179
	1,0	0,9181	0,9655	1,0120	1,0581	1,1031	1,1473
	1,5	0,8192	0,8640	0,9078	0,9509	0,9934	1,0346

Zahlentafel 3. λ-Werte der Grenzkurven.

Kurve	γ_1 \ γ_2	0	−0,1	−0,2	−0,3	−0,4	−0,5
C_0	0,0	0,0000	−0,0013	−0,0051	−0,0112	−0,0199	−0,0311
	0,5	−0,1138	−0,1076	−0,1049	−0,1049	−0,1074	−0,1129
	1,0	−0,3785	−0,3619	−0,3434	−0,3370	−0,3286	−0,3235
	1,5	−0,7086	−0,6637	−0,6610	−0,6410	−0,6232	−0,6085
$C_{1/2}$	0,0	0,2500	0,2482	0,2436	0,2354	0,2236	0,2088
	0,5	−0,0276	−0,0178	−0,0112	−0,0075	−0,0072	−0,0102
	1,0	−0,3477	−0,3287	−0,3125	−0,2991	−0,2885	−0,2811
	1,5	−0,6964	−0,6703	−0,6466	−0,6253	−0,6065	−0,5904
$S_{1/2}$	0,0	0,2500	0,2482	0,2436	0,2354	0,2236	0,2088
	0,5	0,4648	0,4500	0,4322	0,4114	0,3877	0,3613
	1,0	0,5948	0,5678	0,5411	0,5071	0,4735	0,4383
	1,5	0,6298	0,5950	0,5586	0,5207	0,4813	0,4411
C_1	0,0	1,0000	1,0497	1,0988	1,1472	1,1949	1,2419
	0,5	1,0928	1,1345	1,1756	1,2163	1,2571	1,2972
	1,0	1,2932	1,3204	1,3474	1,3741	1,4005	1,4267
	1,5	1,5113	1,5251	1,5380	1,5524	1,5626	1,5740
S_1	0,0	1,0000	0,9497	0,8987	0,8472	0,7951	0,7424
	0,5	0,9793	0,9295	0,8793	0,8259	0,7769	0,7243
	1,0	0,9181	0,8700	0,8213	0,7719	0,7218	0,6711
	1,5	0,8192	0,7737	0,7274	0,6835	0,6326	0,5843

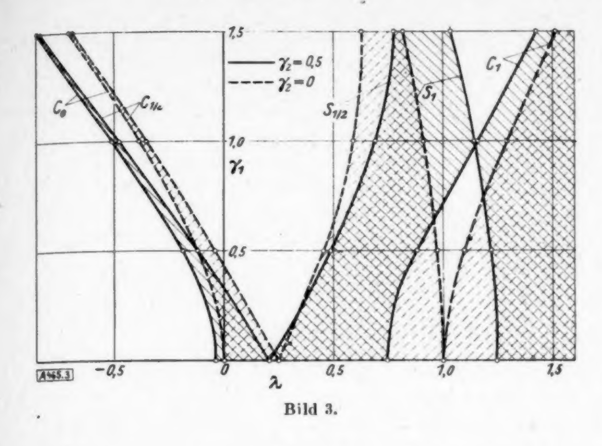


Bild 3.

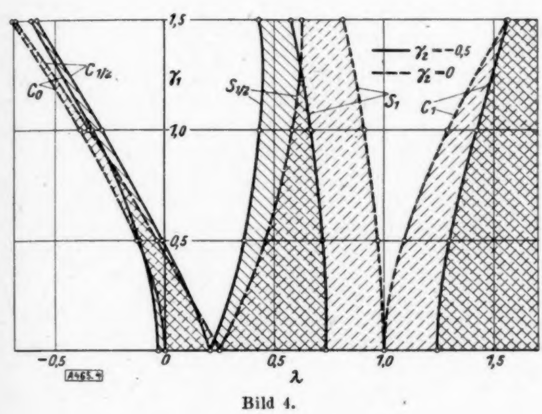


Bild 4.

Die Entscheidung darüber, welche Gebiete stabil und welche instabil sind, kann nach einem Satz von Haupt getroffen werden [6, S. 15, Satz I]. Auf den Abbildungen sind die so ermittelten stabilen Gebiete, wie üblich, durch Schraffur kenntlich gemacht.

Nach demselben Satz kann auch über Stabilität und Instabilität der Lösungen auf den Grenzkurven entschieden werden. Die Lösungen sind für diese Parameterwerte im allgemeinen instabil; nur zu den Parameterwerten der Schnittpunkte zweier (gleichzahliger) Grenzkurven gehört eine stabile Lösung. So gehören zu

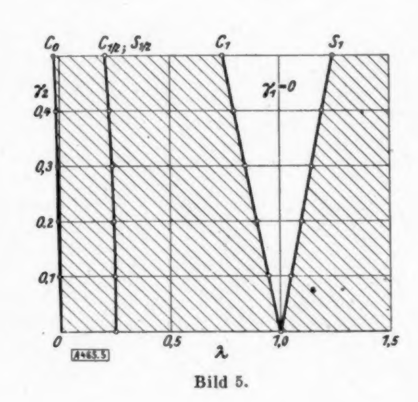


Bild 5.

den Schnittpunkten der C_1- und S_1-Kurve (für positives γ_2) stabile Lösungen, ebenso zu den Schnittpunkten der $C_{1/2}$- und $S_{1/2}$-Kurve auf der λ-Achse.

Bild 5 zeigt noch den Schnitt $\gamma_1 = 0$ durch den Stabilitätskörper. Er stellt also die Stabilitätsverhältnisse der Differentialgleichung $y'' + (\lambda + \gamma_2 \cos 2x)\, y = 0$ dar. Die Kurven $C_{1/2}$ und $S_{1/2}$ liegen jetzt (zusammenfallend) ganz im (ersten) stabilen Bereich.

Schrifttumverzeichnis.

[1] K. Klotter: Forsch. Ing. Wes. Bd. 12 (1941), S. 209.

[2] E. L. Ince: Proc. Roy. Soc. Edinburgh Bd. 52 (1931/32), S. 355; siehe dazu auch M. J. O. Strutt, Z. Physik, Bd. 69 (1931), S. 597.

[3] M. J. O. Strutt: Physica Bd. 7 (1927), S. 265; siehe dazu auch E. Meißner, Schweiz. Bauztg. Bd. 72 (1918), S. 95.

[4] A. Weigand: Unveröffentlichter Bericht der DVL, Inst. X.

[5] F. Kluge: Ing.-Arch. Bd. 2 (1931), S. 119.

[6] M. J. O. Strutt: Lamésche, Mathieusche und verwandte Funktionen in Physik und Technik, Ergebnisse der Mathematik, I, 3. Berlin 1932.

Der starre Kreiszylinder im isotropen elastischen Medium.

Von *F. Reutter* in Karlsruhe.

Aus dem elastischen Halbraum $z > 0$ wird ein solcher Raumteil ausgespart, daß in ihn ein starrer Kreiszylinder eingepaßt werden kann. Die kleinen Verschiebungen, die die Punkte des elastischen Mediums durch das Eindrücken dieses Zylinders erfahren, werden bestimmt. Ihre Ermittlung führt auf zwei lineare Integralgleichungen erster Art, deren Lösung durch Zurückführung auf ein System von unendlichvielen linearen Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten gelingt.

1. Einleitung und Formulierung des Problems.

Zu den Problemen der räumlichen Elastizitätstheorie, die eine geschlossene Lösung gefunden haben, gehört der starre Stempel auf einer ebenen elastischen Unterlage[1]). Die vorliegende Arbeit hat eine Erweiterung jener Untersuchung zum Ziel. Aus einem elastischen Medium — es sei der Halbraum $z > 0$ gegeben — werde ein kreiszylindrischer Raumteil $0 \leqq z \leqq k$ vom Radius c herausgenommen (Bild 1). In den ausgesparten Teil denken wir uns einen Zylinder vom Radius c so eingepaßt, daß der Zylindermantel am Rande des elastischen Mediums fest anliegt. Der Zylinder werde durch eine in Richtung der positiven z-Achse wirkende Kraft in das elastische Medium eingedrückt. Dabei soll der Zylinder als starr angesehen werden, d. h. sein Material sei gegenüber dem des elastischen Mediums so hart, daß seine Formänderung vernachlässigt werden kann.

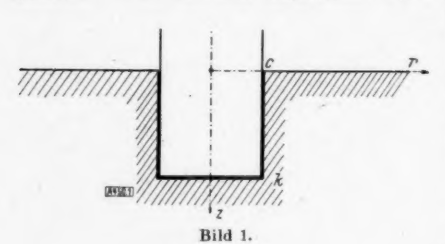


Bild 1.

Unter dem Drucke des Zylinders erleiden alle an der Zylindergrundfläche anliegenden Punkte des elastischen Mediums eine konstante kleine Verschiebung in Richtung der positiven z-Achse. Wir nehmen ferner an, daß längs des Zylindermantels keine Verschiebungen in radialer Richtung erfolgen und es soll längs des Zylindermantels die Schubspannung gleich der Normalspannung multipliziert mit der Haftreibungsziffer sein. Aus diesen Annahmen ergeben sich sofort die Randbedingungen unseres Problems (Nr. 3).

Von praktischer Bedeutung ist diese Untersuchung u. U. für die Baugrundforschung (z. B.: Einrammen eines Pfahles in den Baugrund. Das Material des Pfahles ist so hart zu denken, daß seine Formänderung gegenüber der des (elastischen) Baugrundes vernachlässigt werden kann).

Die Verschiebungskomponenten genügen der Bipotentialgleichung. Deren Lösungen lassen sich mit Hilfe von Potentialfunktionen aufbauen. Man erhält so für die Verschiebungskomponenten je von einem Parameter a abhängige Partikulärlösungen, die aber die Randbedingungen noch nicht erfüllen. Durch Integration gewinnt man hieraus Lösungen, die zwei unter dem Integralzeichen stehende Funktionen $g(a)$ und $h(a)$ enthalten. Diese sind gemäß den Randbedingungen zu bestimmen. Ihre Ermittlung führt auf lineare Integralgleichungen erster Art. Während sich die Lösung $h(a)$ aus bekannten Integralrelationen für Besselsche Funktionen sofort ablesen läßt, ergibt sich $g(a)$ zunächst in der Form $g(a) = \int_0^\infty \sigma(\beta) J_{1+\beta}(ac)\, a^{-\beta}\, d\beta$. Die „Verteilungsfunktion" $\sigma(\beta)$ ist wiederum durch eine lineare Integralgleichung erster Art bestimmt. Indem man das uneigentliche Integral durch unendliche Summen (bei halbzahligen β-Intervallen) ersetzt, erhält man $g(a)$ als Summe zweier unendlicher Reihen, deren Glieder Produkte aus Besselfunktionen steigenden (ganz- bzw. halbzahligen) Parameters und negativen Potenzen von a darstellen. Die Koeffizienten dieser Reihen lassen sich mittels eines Verfahrens, das für die Behandlung solcher linearer Integralgleichungen erster Art von grundsätzlicher Bedeutung ist, durch ein unendliches Gleichungssystem bestimmen. Dessen Auflösung wird im ersten Schritt angegeben, und es wird hieraus u. a. die Schubspannungsverteilung längs des Zylindermantels und längs des Deckels ermittelt und in Diagrammen dargestellt.

[1]) E. Trefftz: Math. Grundlagen der Elastizitätstheorie in Frank-Mises, Differentialgln. d. Physik, Bd. II, Braunschweig 1935, S. 306 ff.

2. Die Grundgleichungen und ihre Partikulärlösungen.

Zur analytischen Behandlung des in Nr. 1 formulierten Problems führen wir Zylinderkoordinaten z (Bild 1), r (Abstand von der z-Achse), ϑ (Winkel einer beliebigen Ebene durch die z-Achse gegen eine feste Ebene) ein. Da der Zylinder nur durch eine in Richtung der positiven z-Achse wirkende Kraft in das elastische Medium eingedrückt wird, sind die Verschiebungen vom Winkel ϑ unabhängig. Daher ist der Verschiebungsvektor $\mathfrak{u}$ für einen beliebigen Punkt $P(r,z)$ des elastischen Mediums gegeben durch

$$\mathfrak{u} = \varphi \cdot \mathfrak{e} + \chi \cdot \mathfrak{k}.$$

$\mathfrak{e}$ ist ein Einheitsvektor in radialer Richtung, $\mathfrak{k}$ der Einheitsvektor in der z-Richtung. φ und χ genügen den Differentialgleichungen:

$$\Delta\Delta\varphi - \Delta\left(\frac{1}{r^2}\varphi\right) - \frac{1}{r^2}\Delta\varphi + \frac{1}{r^4}\varphi = 0, \qquad \Delta\Delta\chi = 0 \ (\Delta \text{ Laplacescher Operator}).$$

Wir führen die biharmonischen Funktionen φ und χ auf harmonische zurück durch den Ansatz[2])

$$\left.\begin{aligned} \varphi(r,z) &= \eta(r,z) + (z-k)\,\psi_r(r,z) \\ \chi(r,z) &= \zeta(r,z) + (z-k)\,\psi_z(r,z) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Die Funktionen $\eta(r,z)$, $\zeta(r,z)$, $\psi(r,z)$ genügen den Differentialgleichungen

$$\Delta\eta - \frac{1}{r^2}\eta = 0, \qquad \Delta\zeta = 0, \qquad \Delta\psi = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

und es gilt auch

$$\Delta\psi_z = 0, \quad \Delta\psi_r - \frac{1}{r^2}\psi_r = 0.$$

Außerdem liefern die Gleichgewichtsbedingungen der Elastizitätstheorie die Beziehungen:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{r^2}\varphi + \frac{m}{m-2}\frac{\partial}{\partial r}\operatorname{div}\mathfrak{u} = 0,$$

$$\Delta\chi + \frac{m}{m-2}\frac{\partial}{\partial z}\operatorname{div}\mathfrak{u} = 0,$$

m Querkontraktionszahl. Hieraus folgt unter Berücksichtigung der Gl. (2):

$$\psi_z = -\frac{m}{3m-4}\left(\frac{1}{r}\eta + \eta_r + \zeta_z\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Die beiden ersten Gln. (2) werden durch die Ansätze:

$$\eta(r,z) = R(r)\,Z(z) \qquad\qquad \zeta(r,z) = X(r)\,Y(z)$$

gelöst. Dann gilt:

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \left(A^2 - \frac{1}{r}\right)R = 0 \qquad\qquad X'' + \frac{1}{r}X' + B^2X = 0$$

$$Z'' - A^2 Z = 0 \qquad\qquad Y'' - B^2 Y = 0.$$

Da die Verschiebung für $r=0$ und $z\to\infty$ nicht unendlich groß werden darf, erhält man zunächst die Partikulärlösungen

$$\eta = a\,J_1(\alpha r)\,e^{-\alpha z} \qquad\qquad \zeta = b\,J_0(\alpha r)\,e^{-\alpha z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

a, b, α sind beliebig wählbare Größen. Daher wäre die allgemeinste Lösung:

$$\eta = \int_0^\infty g(\alpha)\,J_1(\alpha r)\,e^{-\alpha z}\,d\alpha, \quad \zeta = \int_0^\infty h(\alpha)\,J_0(\alpha r)\,e^{-\alpha z}\,d\alpha.$$

Die Funktionen $g(\alpha)$ und $h(\alpha)$ sind vorläufig unbekannt und später gemäß den Randbedingungen zu bestimmen. Wegen des Ansatzes (1) erhielte man jetzt für $z=k$:

---

[2]) Vgl. hierzu Frank-Mises: Differentialgln. der Physik, Bd. I, Braunschweig 1930, S. 848, oder Grammel-Biezeno: Techn. Dynamik, Berlin 1939, S. 126.

$$\varphi(k) = \int_0^\infty g(a)\, J_1(a\,r)\, e^{-a k}\, \mathrm{d}\,a,$$

$$\chi(k) = \int_0^\infty h(a)\, J_0(a\,r)\, e^{-a k}\, \mathrm{d}\,a.$$

Soll für die Punkte $z = k$, $0 \leqq r \leqq c$ eine konstante Verschiebung in der z-Richtung stattfinden, so muß

$$\zeta(k) = M = \text{konstans}$$

sein. Diese Bedingung ist erfüllbar für $h(a)\, e^{-a k} = \frac{2\,M}{\pi} \frac{\sin c\,a}{a}$ (s. Nr. 3, Gl. 7). Dann wird

$$\zeta(z) = \frac{2\,M}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin c\,a}{a}\, J_0(a\,r)\, e^{a(k-z)}\, \mathrm{d}\,a.$$

Dies Integral ist aber für $z < k$ divergent und man gelangt nur dann zu konvergenten Integralen, wenn man den Ansatz (4) der Partikulärlösungen von vornherein wie folgt abändert:

$$\eta = a\, J_1(a\,r)\, e^{-a|z-k|}, \qquad \zeta = b\, J_0(a\,r)\, e^{-a|z-k|}.$$

Damit besitzen zwar die Partikulärlösungen einen Sprung der ersten Ableitung an der Stelle $z = k$, doch läßt sich die Funktion $g(a)$ so bestimmen, daß die durch Integration aus diesen Partikulärlösungen gewonnene endgültige (d. h. die Randbedingungen erfüllende) Lösung in den Ableitungen der Verschiebungskomponenten für $z = k$ keinen Sprung aufweist. Bekanntlich „glättet" die Integration. Mit dem neuen Ansatz wird:

$$\eta = \int_0^\infty g(a)\, J_1(a\,r)\, e^{-a|z-k|}\, \mathrm{d}\,a,$$

$$\zeta = \int_0^\infty h(a)\, J_0(a\,r)\, e^{-a|z-k|}\, \mathrm{d}\,a.$$

Aus Gleichung (3) folgt dann durch Integration nach z:

$$\psi = -p \int_0^\infty [h(a) \mp g(a)]\, J_0(a\,r)\, e^{-a|z-k|}\, \mathrm{d}\,a + \omega(r) \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

mit $p = \frac{m}{3\,m - 4}$. Dabei ist $\omega(r)$ eine Potentialfunktion, die sich aber auf eine additive Konstante reduziert. Mit den aus (5) folgenden Werten für ψ_r, ψ_z erhält man schließlich:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \int_0^\infty g(a)\, J_1(a\,r)\, e^{-a|z-k|}\, \mathrm{d}\,a + p\,(z-k) \int_0^\infty [h(a) \mp g(a)]\, a\, J_1(a\,r)\, e^{-a|z-k|}\, \mathrm{d}\,a \\ \chi &= \int_0^\infty h(a)\, J_0(a\,r)\, e^{-a|z-k|}\, \mathrm{d}\,a - p\,(z-k) \int_0^\infty [g(a) \mp h(a)]\, a\, J_0(a\,r)\, e^{-a|z-k|}\, \mathrm{d}\,a \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (6).$$

Das obere Vorzeichen gilt jeweils für $z > k$, das untere für $z < k$.

Außer der durch den Produktansatz erhaltenen Partikulärlösung (4) für $\Delta\,\zeta = 0$ scheiden alle übrigen Partikulärlösungen dieser Gleichung von vornherein aus, da sie durchweg unzulässige Singularitäten besitzen, indem sie an bestimmten Stellen zu unendlichen Verschiebungen führen.

3. Die Randbedingungen.

Die Funktionen $g(a)$ und $h(a)$ im Ansatz (6) sind jetzt gemäß den Randbedingungen zu bestimmen.

a) Für $z = k$, $0 \leqq r \leqq c$ sollen alle Punkte der Deckfläche des Zylinders eine konstante kleine Verschiebung M in der z-Richtung erleiden.

b) Für $r = c$, $0 \leqq z \leqq k$ soll keine Verschiebung in radialer Richtung erfolgen.

c) Für $r = c$, $0 \leqq z \leqq k$ soll die Schubspannung τ_{rz} gleich der Normalspannung σ_r multipliziert mit der Haftreibungsziffer f_0 sein.

Außerdem gehört für $r > c$ die Ebene $z = 0$ zur Berandung. Wir stellen für diese aber vorläufig noch keine Bedingung. Es wird sich später zeigen (Nr. 7), daß unsere im folgenden gewonnene Lösung für $z = 0$, $r \geqq c$ nahezu verschwindende Schub- und Normalspannungen τ_{rz}, σ_z liefert, was man eigentlich von vornherein als Randbedingung zu fordern hätte.

Nachdem wir die Ebene $z = k$, die die Deckfläche des Zylinders enthält, durch die Randbedingungen wie durch den Ansatz (6) ausgezeichnet haben, ist noch die weitere Bedingung zu stellen:

Für $z = k$ dürfen die Ableitungen der Verschiebungskomponenten keinen Sprung erleiden. Denn diese sind lineare Funktionen der Spannungen. Wir schreiben also nur längs des Mantels zwei Bedingungen in der üblichen Form vor, längs des Deckels geben wir nur eine Verschiebungskomponente und fordern Stetigkeit der Spannungen in der Ebene des Deckels für $r > c$. Aus den Gln. (6) errechnet man aber leicht, daß $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$, $\frac{\partial \chi}{\partial r}$ von vornherein für $z = k$ stetig bleiben, daß aber $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, $\frac{\partial \chi}{\partial z}$ dann und nur dann keinen Sprung erfahren, wenn die Funktionen $g(a)$ und $h(a)$ die Bedingungen

$$\text{d)} \int_0^\infty a\, h(a)\, J_0(a r)\, \mathrm{d}a = 0 \qquad \text{für } r > c,$$

$$\text{e)} \int_0^\infty a\, g(a)\, J_1(a r)\, \mathrm{d}a = 0 \qquad \text{für } r > c$$

erfüllen. Die Randbedingung a) findet dagegen folgende mathematische Formulierung:

$$\text{a)} \int_0^\infty h(a)\, J_0(a r)\, \mathrm{d}a = M \qquad \text{für } 0 \leqq r \leqq c.$$

Durch die Bedingungen a) und d) ist die Funktion $h(a)$ vollständig bestimmt, man erhält[3])

$$h(a) = \frac{2M}{\pi} \frac{\sin c a}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

4. Die Integralgleichungen für die Funktion $g(a)$.

Wesentlich schwieriger ist die Ermittlung der Funktion $g(a)$, die zugleich den Bedingungen b), c), e) genügen muß. Zunächst ist

$$J_\nu(a c)\, a^{1-\nu} \qquad \text{mit } \nu > 1$$

eine die Bedingung e) erfüllende Funktion, denn es gilt[4]):

$$\int_0^\infty J_1(a r)\, J_\nu(a c)\, a^{2-\nu}\, \mathrm{d}a = 0 \qquad \text{für } r > c.$$

Das Integral ist konvergent für beliebige (rationale und irrationale) $\nu > 1$. Also ist die allgemeinste der Bedingung e) genügende Funktion

$$g(a) = \int_0^\infty \sigma(\beta)\, J_{1+\beta}(a c)\, a^{-\beta}\, \mathrm{d}\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

mit $\sigma(0) = 0$. Die Bestimmung von $g(a)$ ist daher auf die Ermittlung einer Funktion $\sigma(\beta)$ zurückgeführt. Wir ersetzen nun das uneigentliche Integral durch eine unendliche Reihe mit diskreten (halb- und ganzzahligen) β-Werten:

$$g(a) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu\, J_{\nu+1}(a c)\, a^{-\nu} + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu\, J_{\nu+1/2}(a c)\, a^{-\nu+1/2}.$$

Der Bedingung $\sigma(0) = 0$ ist damit bereits Rechnung getragen. Alle Funktionen $J_{\nu+1}(ac)\, a^{-\nu}$ und $J_{\nu+1/2}(ac)\, a^{-\nu+1/2}$ sind ungerade Funktionen, die an der Stelle $a = 0$ eine Nullstelle erster Ordnung besitzen. Die Funktionen einer jeden der beiden Reihen

[3]) Frank-Mises: Bd. I, S. 420, Bd. II, S. 306.

[4]) Nielsen: Handbuch d. Theorie der Zylinderfunktionen, Leipzig 1902, S. 199.

$$\left.\begin{aligned} g_1(a) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu J_{\nu+1}(ac)\, a^{-\nu} \\ g_2(a) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu J_{\nu+1/2}(ac)\, a^{-\nu+1/2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (9)$$

sind untereinander linear unabhängig. Zur (gleichmäßigen) Konvergenz dieser Reihen reicht es hin, wenn die Koeffizienten a_ν, b_ν beschränkt sind:

$$|a_\nu| < N, \qquad |b_\nu| < N.$$

Denn da $\sum_{\nu=1}^{\infty} J_{\nu+1}(ac)$[5]) (gleichmäßig) konvergiert, konvergiert $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_{\nu+1}(ac)}{a^\nu}$ für $|a| > 1$ offensichtlich, für $|a| < 1$ aber wegen

$$|J_\nu(a)| < \frac{1}{\Pi(\nu+1)} \frac{|a|^{\nu+1}}{2} e^{\left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

ebenfalls und zwar gleichmäßig in a. Mit Hilfe dieser letzteren Beziehung zeigt man ebenso leicht die Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_{\nu+1/2}(ac)}{a^{\nu-1/2}}$. Reihen des Typus (9) sind bisher wohl nicht bekannt. Bei Nielsen treten zwar Reihen mit einer ähnlichen Struktur auf, es läßt sich z. B. zeigen, daß jede ungerade Funktion in eine Reihe der Form[6])

$$f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} A_s \left(\frac{x}{2}\right)^{s-1-k} J_{k+s}(x) \quad k \text{ fest, keine negative ganze Zahl}$$

entwickelt werden kann.

Wir suchen nun die Koeffizienten a_ν, b_ν im Ansatz (9) so zu bestimmen, daß die Randbedingungen b), c) erfüllt sind.

Die Bedingung b) verlangt

$$\text{b)} \int_0^\infty g(a) J_1(ac)\, e^{-a|z-k|}\, \mathrm{d}a + p(z-k) \int_0^\infty [h(a) + g(a)]\, a J_1(ac)\, e^{-a|z-k|}\, \mathrm{d}a = 0$$
$$\text{für } 0 \leqq z \leqq k,$$

entsprechend c):

$$\text{c)} \left\{(m-2)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \chi}{\partial r}\right) = 2 f_0 \left[(m-1)\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \chi}{\partial z} + \frac{\varphi}{r}\right]\right\}_{r=c} \quad \text{für } 0 \leqq z \leqq k,$$

wo die Ableitung an der Stelle $r = c$ aus den Gln. (7) zu bilden ist. Die Gleichung c) enthält nach Ausrechnung die Funktion $g(a)$ ebenfalls linear. Beide Gleichungen können auch als Bedingungen für die Funktion $\sigma(\beta)$ (Gl. 8) geschrieben werden. Grundsätzlich ist dann jede der Randbedingungen vom Typus

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \sigma(\beta) \cdot \tau(r, z, a)\, J_{1+\beta}(ac)\, \mathrm{d}a\, \mathrm{d}\beta = w(r, z).$$

$\sigma(\beta)$ ist vollständig bestimmt, wenn für jeden Teil der Berandung (Bild 1) eine derartige Bedingungsgleichung vorgeschrieben wird.

Wir geben nun den beiden Bedingungen b), c) noch eine Form, die zeigt, daß sie eigentlich nur eine Integralgleichung 1. Art für $g(a)$ darstellen.

Die Randbedingungen b), c) sind ja zunächst zwei Integralgleichungen 1. Art für ein und dieselbe Funktion $g(a)$ von der Form

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty K_1(a, z)\, g(a)\, \mathrm{d}a &= G_1(z) \\ \int_0^\infty K_2(a, z)\, g(a)\, \mathrm{d}a &= G_2(z) \end{aligned}\right\} \quad 0 < z < k.$$

---

[5]) Frank-Mises: I, S. 447. — Graf-Gubbler: Besselfunktionen, H. 2, Bern 1900, S. 71.
[6]) Nielsen: Handbuch, S. 267. — Nyt Tidsskrift för Mathematik 9 B (1898), S. 83.

Das Grundgebiet ist aber $0 < z < \infty$; über das Intervall $k < z < \infty$ des Grundgebietes ist gar nicht, über das Intervall $0 < z < k$ doppelt verfügt. Nach Ausführung der Substitution $z' = \frac{k}{z}$ mit $K_2\left(a, \frac{k}{z'}\right) = K_1'(a, z')$, $G_2(z) = G_2\left(\frac{k}{z'}\right) = G_1'(z')$ und Wiedereinführung der Bezeichnung z an Stelle von z' genügt also $g(a)$ den Gleichungen:

$$\int_0^\infty K_1(a, z)\, g(a)\, \mathrm{d}a = G_1(z) \qquad 0 < z < k$$

$$\int_0^\infty K_1'(a, z)\, g(a)\, \mathrm{d}a = G_1'(z) \qquad k < z < \infty.$$

Oder endlich mit
$$\begin{cases} K(a, z) = \begin{cases} K_1(a, z) & 0 < z < k \\ K_1'(a, z) & k < z < \infty \end{cases} \\ G(z) = \begin{cases} G_1(z) & 0 < z < k \\ G_1'(z) & k < z < \infty \end{cases} \end{cases}$$

gilt die einzige Integralgleichung 1. Art mit dem für $z = k$ unstetigen Kern $K(a, z)$ und der für $z = k$ unstetigen Störungsfunktion $G(z)$:

$$\int_0^\infty K(a, z)\, g(a)\, \mathrm{d}a = G(z) \qquad 0 < z < \infty$$

Damit ist auch die Verträglichkeit der beiden Gleichungen b), c) für $g(a)$ nachgewiesen. Auf die weitere Frage, ob die Bedingungen b), c) zur eindeutigen Bestimmung von $g(a)$ ausreichen, kommen wir in Nr. 7 zurück. Entsprechendes gilt auch für die Integralgleichungen für $\sigma(\beta)$.

Unter Mitberücksichtigung der Sprungbedingung e) kann endlich der Kern auch als Funktion von 3 Veränderlichen[7]), die Störungsfunktion als Funktion von 2 Veränderlichen geschrieben werden; es gilt die Integralgleichung

$$\int_0^\infty K(r, z, a)\, g(a)\, \mathrm{d}a = G(r, z) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

mit

$$G(r, z) = \begin{cases} G_1(z) & \text{für } z < k,\ r = c \\ 0 & \text{„}\ z = k,\ r > c \\ G_1'(z) & \text{„}\ z > k,\ r = c \end{cases}$$

$$K(r, z, a) = \begin{cases} K_1(a, z) & \text{für } z < k,\ r = c \\ a\, J_1(a c) & \text{„}\ z = k,\ r > c \\ K_1'(a, z) & \text{„}\ z > k,\ r = c. \end{cases}$$

Damit sind die Bedingungen b), c), e) zu einer einzigen Integralgleichung zusammengefaßt.

5. Ersatz der Integralgleichungen durch ein unendliches Gleichungssystem.

Wir behandeln die Integralgleichungen b), c) mittels einer Modifikation eines bekannten, aber praktisch wohl noch wenig angewandten Verfahrens[8]).

Ist die Integralgleichung 1. Art

$$\int_0^l K(x, z)\, f(z)\, \mathrm{d}z = g(x)$$

vorgelegt, sind aber die Eigenfunktionen des Kerns $K(x, z)$ nicht bekannt, so bilde man aus der Integralgleichung durch Multiplikation mit den ∞^1 Funktionen $\psi_\nu(x)$ eines abgeschlossenen Funktionensystems, das wir gleich als orthogonal annehmen wollen, und Integration nach x die ∞^1 Gleichungen

[7]) Hellinger-Toeplitz: Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten in Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. II, III$_2$, S. 1389.

[8]) S. z. B. Hamel: Integralgleichungen, Berlin 1937, S. 93/94.

$$\int_0^l \int_0^l K(x,z) f(z) \psi_\nu(x) \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \int_0^l g(x)\psi_\nu(x)\,\mathrm{d}x = C_\nu \qquad \nu = 1, 2, \ldots$$

Oder mit $\int_0^l K(x,z)\psi_\nu(x)\,\mathrm{d}x = u_\nu(z)$:

$$\int_0^l f(z) u_\nu(z)\,\mathrm{d}z = C_\nu \qquad \nu = 1, 2, \ldots$$

Bilden die $u_\nu(z)$ bereits ein Orthogonalsystem, so ist

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu u_\nu(z),$$

im anderen Falle sind die $u_\nu(z)$ erst zu orthogonalisieren.

Im vorliegenden Fall läßt sich das Verfahren nicht unmittelbar anwenden, da $f(z)$ ja teilweise schon durch die Bedingung e) festgelegt ist. Wir können aber jetzt $f(z)$ als Reihe nach den ∞^1 Funktionen $\chi_\mu(z)$ — s. Ansatz (9) — ansetzen und erhalten:

$$f(z) = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu \chi_\mu(z).$$

Mit

$$\int_0^l \chi_\mu(z) u_\nu(z)\,\mathrm{d}z = B_{\mu\nu}$$

ergeben sich daher die ∞^1 Gleichungen

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} B_{\mu\nu} A_\mu = C_\nu$$

zur Bestimmung der Koeffizienten A_μ.

In dieser Weise behandeln wir die Integralgleichungen b) und c): Diese Gleichungen enthalten noch die Veränderliche z. Es werden jetzt beide Gleichungen mit $\cos\left(m\frac{\pi}{k}(z-k)\right)$ multipliziert und über z von 0 bis k integriert, zugleich wird der Ansatz (9) in b) und c) eingeführt. (Es würde zunächst naheliegen, an Stelle des Funktionensystems $\cos\left(m\frac{\pi}{k}(z-k)\right)$ ein System von ∞^1 Zylinderfunktionen zu verwenden, doch erweist sich dies als nicht durchführbar.)

Nun spaltet jede der Gleichungen b) und c) in je unendlichviele Gleichungen ($n = 0, 1, 2, \ldots$) auf und man erhält ∞^1 Gleichungen für die ∞^1 unbekannten Größen a_ν, b_ν.

Setzt man

$$c_m(\alpha) = \int_k^0 e^{-\alpha|k-z|}\cos\left(m\frac{\pi}{k}(z-k)\right)\mathrm{d}(k-z) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \frac{\pi^2 n^2}{k^2}}\left((-1)^n e^{-\alpha k} - 1\right),$$

$$\mathrm{d}_m(\alpha) = \int_k^0 (z-k)\, e^{-\alpha|k-z|}\,\mathrm{d}(k-z) = \frac{2\pi^2 n^2}{k^2}\,\frac{(-1)^n e^{-\alpha k} - 1}{\left(\alpha^2 + \frac{\pi^2 n^2}{k^2}\right)^2} - \frac{(-1)^n e^{-\alpha k}(1+\alpha k) - 1}{\alpha^2 + \frac{\pi^2 n^2}{k^2}},$$

so gelangt man durch das angegebene Verfahren schließlich zu folgendem System von $2\times\infty^1$ Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \left\{\omega_{131}^{n\nu}(1-p) + \omega_{132}^{n\nu}(1-p) - kp\,\omega_{133}^{n\nu} + \frac{2\pi^2 p^2}{k^2}\omega_{134}^{n\nu} + \frac{2\pi^2 p}{k^2}\omega_{135}^{n\nu}\right\} \\
&+ \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \left\{\omega_{141}^{n\nu}(1-p) + \omega_{142}^{n\nu}(1-p) - kp\,\omega_{143}^{n\nu} + \frac{2\pi^2 p^2}{k^2}\omega_{144}^{n\nu} + \frac{2\pi^2 p}{k^2}\omega_{145}^{n\nu}\right\} \\
&= -p\left(\varkappa_{11}^{n} + k\varkappa_{12}^{n} + \varkappa_{13}^{n}\right) + \frac{2\pi^2 p}{k^2}\left(\varkappa_{21}^{n} + \varkappa_{23}^{n}\right) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \Big\{-2 f_0 (m-1-p)\left(\omega_{011}^{n\nu}+\omega_{012}^{n\nu}\right)-\frac{4\pi^2}{k^2}(m-1) f_0 p\left(\omega_{014}^{n\nu}+\omega_{015}^{n\nu}\right)\\
&+2(m-1) f_0 p\left(\omega_{011}^{n\nu}+k\,\omega_{013}^{n\nu}+\omega_{012}^{n\nu}\right)+(1+p)(m-2)\left(\omega_{111}^{n\nu}+\omega_{112}^{n\nu}\right)\\
&+\frac{4\pi^2 f_0}{k^2 c} p(m-2)\left(\omega_{134}^{n\nu}+\omega_{135}^{n\nu}\right)-\frac{2 f_0}{c} p(m-2)\left(\omega_{131}^{n\nu}+k\,\omega_{133}^{n\nu}+\omega_{132}^{n\nu}\right)\\
&+\frac{2 f_0}{c}(m-2)\left(\omega_{131}^{n\nu}+\omega_{132}^{n\nu}\right)+\frac{4\pi^2 p}{k^2}(f_0+m-2)\left(\omega_{114}^{n\nu}+\omega_{115}^{n\nu}\right)\\
&-2p(f_0+m-2)\left(\omega_{111}^{n\nu}+k\,\omega_{113}^{n\nu}+\omega_{112}^{n\nu}\right)\Big\}\\
&+\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \Big\{-2 f_0 (m-1-p)\left(\omega_{021}^{n\nu}+\omega_{022}^{n\nu}\right)-\frac{4\pi^2}{k^2}(m-1) f_0 p\left(\omega_{024}^{n\nu}+\omega_{025}^{n\nu}\right)\\
&+2(m-1) f_0 p\left(\omega_{021}^{n\nu}+k\,\omega_{023}^{n\nu}+\omega_{022}^{n\nu}\right)+(1+p)(m-2)\left(\omega_{121}^{n\nu}+\omega_{122}^{n\nu}\right)\\
&+\frac{4\pi^2 f_0}{k^2 c} p(m-2)\left(\omega_{144}^{n\nu}+\omega_{145}^{n\nu}\right)-\frac{2 f_0 p}{c}(m-2)\left(\omega_{141}^{n\nu}+k\,\omega_{143}^{n\nu}+\omega_{142}^{n\nu}\right)\\
&+\frac{2 f_0}{c}(m-2)\left(\omega_{141}^{n\nu}+\omega_{142}^{n\nu}\right)+\frac{4\pi^2 p}{k^2}(f_0+m-2)\left(\omega_{124}^{n\nu}+\omega_{125}^{n\nu}\right)\\
&-2p(f_0+m-2)\left(\omega_{121}^{n\nu}+k\,\omega_{123}^{n\nu}+\omega_{122}^{n\nu}\right)\Big\}\\
&=2 f_0(1-p)\left(\varkappa_{01}^{n}+\varkappa_{02}^{n}\right)+\frac{4\pi^2 p}{k^2} p f_0 (m-2)\left(\varkappa_{03}^{n}+\varkappa_{04}^{n}\right)\\
&-2 p f_0 (m-2)\left(\varkappa_{01}^{n}+k\,\varkappa_{05}^{n}+\varkappa_{02}^{n}\right)-(p-1)(m-2)\left(\varkappa_{21}^{n}+\varkappa_{23}^{n}\right)\\
&-\frac{4\pi^2}{k^2}(m-2)\frac{f_0}{c}\left(\varkappa_{14}^{n}+\varkappa_{15}^{n}\right)+2p(m-2)\frac{f_0}{c}\left(\varkappa_{11}^{n}+k\,\varkappa_{12}^{n}+\varkappa_{13}^{n}\right)\\
&-\frac{4\pi^2}{k^2}(m-2)p\left(\varkappa_{24}^{n}+\varkappa_{25}^{n}\right)+2p(m-2)\left(\varkappa_{21}^{n}+k\,\varkappa_{22}^{n}+\varkappa_{23}^{n}\right)\\
&\hspace{20em} n=0,1,2,\ldots
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (12).
$$

Die Größen $\omega_{\lambda\varrho\sigma}^{n\nu}$, $\varkappa_{\varrho\sigma}^{n}$ sind Integrale von der Form

$$
\left.\begin{aligned}
\omega_{011}^{n\nu}&=\int_0^\infty \frac{J_0(\alpha c)\,J_{\nu+1}(\alpha c)\,\alpha^{2-\nu}}{\alpha^2+\frac{\pi^2 n^2}{k^2}}\,e^{-\alpha k}\,d\alpha &\qquad \omega_{021}^{n\nu}&=\int_0^\infty \frac{J_0(\alpha c)\,J_{\nu+1/2}(\alpha c)\,\alpha^{5/2-\nu}}{\alpha^2+\frac{\pi^2 n^2}{k^2}}\,e^{-\alpha k}\,d\alpha\\
\omega_{111}^{n\nu}&=\int_0^\infty \frac{J_1(\alpha c)\,J_{\nu+1}(\alpha c)\,\alpha^{2-\nu}}{\alpha^2+\frac{\pi^2 n^2}{k^2}}\,e^{-\alpha k}\,d\alpha &\qquad \omega_{121}^{n\nu}&=\int_0^\infty \frac{J_1(\alpha c)\,J_{\nu+1/2}(\alpha c)\,\alpha^{5/2-\nu}}{\alpha^2+\frac{\pi^2 n^2}{k^2}}\,e^{-\alpha k}\,d\alpha\\
\omega_{112}^{n\nu}&=\int_0^\infty \frac{J_1(\alpha c)\,J_{\nu+1}(\alpha c)\,\alpha^{2-\nu}}{\alpha^2+\frac{\pi^2 n^2}{k^2}}\,d\alpha &\qquad \omega_{122}^{n\nu}&=\int_0^\infty \frac{J_1(\alpha c)\,J_{\nu+1/2}(\alpha c)\,\alpha^{5/2-\nu}}{\alpha^2+\frac{\pi^2 n^2}{k^2}}\,d\alpha\\
\omega_{134}^{n\nu}&=\int_0^\infty \frac{J_1(\alpha c)\,J_{\nu+1}(\alpha c)\,\alpha^{1-\nu}}{\left(\alpha^2+\frac{\pi^2 n^2}{k^2}\right)^2}\,e^{-\alpha k}\,d\alpha &\qquad \omega_{144}^{n\nu}&=\int_0^\infty \frac{J_1(\alpha c)\,J_{\nu+1/2}(\alpha c)\,\alpha^{3/2-\nu}}{\left(\alpha^2+\frac{\pi^2 n^2}{k^2}\right)^2}\,e^{-\alpha k}\,d\alpha
\end{aligned}\right\} \quad (13)
$$

$$\left.\begin{aligned}
\varkappa_{01}^n &= \frac{2M}{\pi}\int_0^\infty \frac{J_0(ac)\sin ac}{a^2+\frac{\pi^2 n^2}{k^2}}\cdot a\cdot e^{-ak}\,\mathrm{d}a \qquad & \varkappa_{11}^n &= \frac{2M}{\pi}\int_0^\infty \frac{J_1(ac)\sin ac}{a^2+\frac{\pi^2 n^2}{k^2}}\cdot a\cdot e^{-ak}\,\mathrm{d}a \\
\varkappa_{04}^n &= \frac{2M}{\pi}\int_0^\infty \frac{J_0(ac)\sin ac}{\left(a^2+\frac{\pi^2 n^2}{k^2}\right)^2} e^{-ak}\,\mathrm{d}a & \varkappa_{14}^n &= \frac{2M}{\pi}\int_0^\infty \frac{J_1(ac)\sin ac}{\left(a^2+\frac{\pi^2 n^2}{k^2}\right)^2} e^{-ak}\,\mathrm{d}a
\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

usf.; sie sind z. T. noch mit Vorzeichenfaktoren $(-1)^n$ zu versehen, doch wird hier von ihrer ausführlichen Aufzählung abgesehen.

6. Auflösung des unendlichen Gleichungssystems.

Wir behandeln das unendliche Gleichungssystem (11), (12), indem wir es sukzessive durch ein endliches System mit einer immer größeren Anzahl von Gleichungen und Unbekannten ersetzen. Dazu denken wir uns die Gln. (11) in der abgekürzten Form

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{n\nu}\, a_\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_{n\nu}\, b_\nu = c_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

die Gln. (12) in der Form

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_{n\nu}\, a_\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_{n\nu}\, b_\nu = d_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

geschrieben. Von den ∞^1 Lösungen a_ν, b_ν ist zu verlangen, daß die mit ihnen gebildeten Reihen (9) konvergieren. Dazu genügt es nach Nr. 4, daß die a_ν, b_ν beschränkt sind:

$$|a_\nu| < N, \quad |b_\nu| < N.$$

Unter dieser Annahme ist eine Theorie der unendlichen linearen Gleichungssysteme von H. v. Koch[9]) entwickelt worden, die sich des Apparates der unendlichen Determinanten bedient. Für unsere Zwecke ist aber trotz der andersgearteten Anforderungen an die Lösungen der Anschluß an die Theorie von E. Schmidt[10]) vorteilhafter, deren Konvergenzbedingungen hier leichter zu überblicken sind. Notwendige Bedingung für die Existenz der Lösungen x_ν eines Gleichungssystems von der Form

$$\sum A_{\mu\nu}\, x_\nu = C_\mu$$

unter der Voraussetzung, daß $\sum x_\nu^2$ konvergiert, ist nach E. Schmidt die Konvergenz von $\sum_\nu A_{\mu\nu}^2$ für jedes μ sowie die Konvergenz von $\sum_\mu C_\mu^2$. Diese Bedingungen sind für unser Gleichungssystem (11), (12) erfüllt. Denn in der Zeile (variabler Index ν, feste Nr. n) stehen von links nach rechts, wie man aus den Gln. (13) erkennt, Besselfunktionen steigender Ordnung unter dem Integralzeichen. Die Absolutbeträge der Integrale lassen sich aber insgesamt unter Verwendung von nur sechs verschiedenen Integralen majorisieren. Es ist z. B.

$$\left|\omega_{011}^{n\nu}\right| = \left|\int_0^\infty \frac{J_0(ac)\,J_{\nu+1}(ac)\,a^{2-\nu}}{a^2+\frac{\pi^2 n^2}{k^2}} e^{-ak}\,\mathrm{d}a\right| \leq \frac{k^2}{\pi^2 n^2}\left|\int_0^\infty J_{\nu+1}(ac)\,a^{2-\nu}\,\mathrm{d}a\right|$$

$$= \frac{k^2}{\pi^2 n^2}\cdot\frac{2^{2-\nu}}{c^{3-\nu}}\,\frac{\Pi(1)}{\Pi\left(\frac{2\nu-2}{2}\right)}\,{}^{11)} = \frac{2^{2-\nu}}{c^{3-\nu}}\,\frac{1}{(\nu-1)!}$$

wo $\Pi(z)$ die Gaußsche Π-Funktion darstellt. Sämtliche übrigen Integrale lassen sich in derselben Weise mit Hilfe der fünf folgenden abschätzen:

[9]) H. v. Koch: Acta mathematica, Bd. 16 (1892), S. 217 bis 295.
[10]) E. Schmidt: Rend. di Palermo, Bd. 25 (1908), S. 53 bis 77.
[11]) N. Sonine: Math. Annalen, Bd. 16 (1880), S. 39.

$$\int_0^\infty J_{\nu+1}(ac)\,a^{1-\nu}\,\mathrm{d}a = \frac{2^{1-\nu}}{c^{2-\nu}}\,\frac{\Pi\left(\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}, \qquad \int_0^\infty J_{\nu+1}(ac)\,a^{3-\nu}\,\mathrm{d}a = \frac{2^{3-\nu}}{c^{4-\nu}}\,\frac{\Pi\left(\frac{3}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{2\nu-3}{2}\right)},$$

$$\int_0^\infty J_{\nu+1/2}(ac)\,a^{3/2-\nu}\,\mathrm{d}a = \frac{2^{3/2-\nu}}{c^{5/2-\nu}}\,\frac{\Pi\left(\frac{1}{2}\right)}{\Pi(\nu-1)}, \qquad \int_0^\infty J_{\nu+1/2}(ac)\,a^{5/2-\nu}\,\mathrm{d}a = \frac{2^{5/2-\nu}}{c^{7/2-\nu}}\,\frac{\Pi(1)}{\Pi\left(\frac{2\nu-3}{2}\right)},$$

$$\int_0^\infty J_{\nu+1/2}(ac)\,a^{7/2-\nu}\,\mathrm{d}a = \frac{2^{7/2-\nu}}{c^{9/2-\nu}}\,\frac{\Pi\left(\frac{3}{2}\right)}{\Pi(\nu-2)}.$$

Alle $\omega_{\varrho\sigma\lambda}^{n\nu}$ nehmen daher ab wie eine Reihe mit Gliedern $\frac{c_\mu}{\mu!}$. Die Koeffizienten $\alpha_{n\nu}$, $\beta_{n\nu}$ der Gleichungensysteme (11), (12) sind aber lineare Kombinationen der Größen $\omega_{\varrho\sigma\lambda}^{n\nu}$, somit ist die Konvergenz von

$$\sum_\nu \alpha_{n\nu}^2 + \sum_\nu \beta_{n\nu}^2 \quad \text{und} \quad \sum_\nu \gamma_{n\nu}^2 + \sum_\nu \delta_{n\nu}^2$$

für jedes n nachgewiesen. Es konvergiert sogar schon die Reihe der absoluten Beträge

$$\sum_\nu |\alpha_{n\nu}| + \sum_\nu |\beta_{n\nu}| \quad \text{und} \quad \sum_\nu |\gamma_{n\nu}| + \sum_\nu |\delta_{n\nu}|.$$

Noch einfacher läßt sich die Konvergenz der Quadratsumme der rechten Seiten der Gleichungssysteme nachweisen, da diese nach den Gln. (14) mindestens wie $\frac{1}{1+n^2}$ abnehmen. Deren Konvergenz ist nach E. Schmidt[12]) zur Existenz eines Lösungssystems x_ν mit konvergenter $\sum x_\nu^2$ auch hinreichend, wenn nach Orthogonalisierung des unendlichen Gleichungssystems die Reihe der Quadratsummen der neuen rechten Seiten $\sum g_n^2$ ebenfalls konvergiert. Die g_n sind lineare Kombinationen der c_ν von der Form

$$g_n = \sum_{\nu=1}^{n} r_{n\nu}\, c_\nu,$$

die $r_{n\nu}$ durch den Orthogonalisierungsprozeß bestimmbare Konstante. Bei der komplizierten Form der Koeffizienten unseres unendlichen Gleichungssystems ist diese Orthogonalisierung nicht ohne weiteres durchführbar, die hinreichende Bedingung also zunächst nicht nachzuprüfen. Wir dürfen aber wohl um so eher annehmen, daß sie erfüllt ist, nachdem nicht nur die Quadratsummen der Koeffizienten, sondern schon die Reihen ihrer absoluten Beträge konvergieren. Zudem sind bei E. Schmidt alle Bedingungen unter der Forderung der Konvergenz der Quadratsumme der Lösungen aufgestellt, während es hier sogar ausreicht, wenn die Lösungen beschränkt sind.

Um endlich die Eindeutigkeit der Lösungen zu gewährleisten, müßte nach E. Schmidt die Quadratsumme der Spaltenquadrate der linken Seiten den Wert 1 besitzen[13]). Dann ist das vorgelegte Gleichungssystem „vollständig". Wir können nun zwar leicht die Konvergenz der Spaltenquadrate

$$\sum_n \alpha_{n\nu}^2 + \sum_n \gamma_{n\nu}^2 \quad \text{und} \quad \sum_n \beta_{n\nu}^2 + \sum_n \delta_{n\nu}^2$$

nachweisen, da innerhalb einer jeden Spalte nach den Gln. (13) die Glieder mindestens wie $\frac{1}{1+n^2}$ abnehmen. Der Nachweis, daß diese Summen jeweils den Wert 1 besitzen, gelingt aber natürlich nicht ohne weiteres. Andererseits ist die Existenz einer eindeutigen Lösung des Randwertproblems durch die Existenzsätze der Theorie der Randwertprobleme gewährleistet. D. h. die Eindeutigkeit der Lösung folgt daraus, daß unsere Reihen $g_1(a)$, $g_2(a)$ nur die Funktion $\sigma(\beta)$ ersetzen, die wiederum durch die Randbedingungen eindeutig bestimmt ist, allerdings unter der Voraussetzung, daß auf allen Rändern je zwei Spannungs- bzw. Verschiebungskomponenten vorgeschrieben sind. Unser Ansatz genügt aber dieser Forderung formal zunächst nur für die Mantelfläche des Zylinders. Wir lassen nun die Frage nach der Eindeutigkeit noch offen und kommen darauf in Nr. 7 zurück.

---

[12]) E. Schmidt: l. c., S. 73.
[13]) E. Schmidt: l. c., S. 69.

Der erste Schritt der numerischen Auflösung wurde durchgeführt und dabei die Koeffizienten a_1, b_1 bestimmt. Die auftretenden Integrale $\omega_{\lambda\varrho\sigma}^{n\nu}$, $\varkappa_{\varrho\sigma}^{n\nu}$ wurden durchweg nach der Simpsonschen Regel auf 5 Stellen berechnet[14]). Die Haftreibungsziffer f_0 wurde zu 0,5 angenommen, die Querkontraktionszahl $m=4$ gesetzt. Ferner wurde angenommen $k=c=1$. Zur praktischen Rechnung wird in den durch die Gln. (13), (14) definierten Integralen die Substitution $ac=u$ ausgeführt, so daß insbesondere

$$\omega_{011}^{n\nu}=\frac{k^2}{c^{3-\nu}}\int_0^\infty \frac{J_0(u)\,J_{\nu+1}(u)\,u^{2-\nu}}{\frac{k^2}{c^2}u^2+\pi^2 n^2}\,e^{-\frac{k}{c}u}\,\mathrm{d}u$$

usf. Dadurch wird erreicht, daß nur noch Abhängigkeit vom Verhältnis $\frac{k}{c}$ besteht und daß die auftretenden Besselfunktionen von k und c ganz unabhängig werden. Daher kann die Rechnung auch für verschiedene Werte k, c rasch durchgeführt werden, wenn die Integrale einmal berechnet sind.

Es ergaben sich so die Werte[15])

$$a_1=-1{,}30535\cdot\frac{2M}{\pi}, \qquad b_1=-0{,}26944\cdot\frac{2M}{\pi}.$$

Die numerische Auflösung bis zu weiteren Koeffizienten und die eingehende mechanische Diskussion soll einer späteren Mitteilung vorbehalten bleiben.

7. Die freie Oberfläche $z=0$. — Eindeutigkeit der Lösung.

Die freie Oberfläche des elastischen Mediums, $z=0$, müßte an und für sich von Normal- wie Schubspannungen frei sein. Wir haben das bei Aufstellung der Randbedingungen nicht gefordert und können daher nicht erwarten, daß unsere Lösung dies liefert. Immerhin erhält man mit dem bisher numerisch durchgeführten ersten Schritt die in Bild 2 wiedergegebene Verteilung der Schubspannungen längs $z=0$, $r>c$. Als Ordinaten sind die Werte $\tau_{rz}\cdot\frac{M}{\pi G}$ aufgetragen. Dabei ist zu beachten, daß die Einsenkung M eine kleine Größe ist. In einer Entfernung von 5 Zylinderradien ist τ_{rz} praktisch abgeklungen, nimmt aber für 2 Zylinderradien im Maße $\frac{M}{\pi G}$ noch endliche Werte an. Die Verteilung der Normalspannungen σ_z wurde zwar noch nicht numerisch errechnet, doch sind die im Ansatz für σ_z auftretenden Integrale vom selben Typus wie bei τ_{rz}, so daß σ_z in ähnlicher Weise abklingt wie τ_{rz}. Wir können daher sagen, daß unsere Lösung zwar in der Umgebung des Deckels, d. h. in genügender Entfernung von der freien Oberfläche, nahezu streng gilt. An der Stelle, da der Zylinder in das elastische Medium „eintaucht", werden aber die wirklichen Verhältnisse u. U. noch nicht genügend genau wiedergegeben. Eine exakte Berücksichtigung der Randbedingungen für die freie Oberfläche ist aber in folgender Weise möglich:

Bild 2.

Das Verschwinden von $(\tau_{rz})_{z=0}$ kann von vornherein gefordert werden. Man gelangt dann zu der Bedingung:

$$2k\,\psi_{zz}-\psi_z+\left(\eta_r+\frac{\eta}{r}+\zeta_z\right)-2\,\zeta_z=0,$$

und zwar kann man zeigen, daß diese Gleichung nicht nur für $z=0$, sondern für alle Werte r, z gilt. Setzt man für ψ_z seinen Wert aus Gl. (3) ein, so folgt nach zweimaliger Integration nach z

[14]) In den Werken von Watson (A treatise of the theory of Besselfunctions, Cambridge 1922) und Nielsen (Handbuch, s. Anm. 3) sind nur einige wenige dieser Integrale enthalten, so daß die numerische Rechnung unumgänglich war.

[15]) Für die Durchführung dieser recht umfangreichen numerischen Rechnungen bin ich Herrn cand. math. Robert Claß zu Dank verpflichtet.

$$\psi(z) = \int_0^\infty [A \cdot g(\alpha) \mp B \cdot h(\alpha)] \frac{J_0(\alpha r)}{\alpha} e^{-\alpha|z-k|} \, d\alpha \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

mit

$$A = -\frac{2}{k} \frac{m-1}{3m-4}, \qquad B = \frac{m-2}{k(3m-4)}.$$

Die Bedingung $(\tau_{rz})_{z=0} = 0$ läßt sich also verwirklichen, ohne daß der Funktion $g(\alpha)$ eine weitere Bedingung auferlegt wird. Dagegen führt die Forderung $(\sigma_z)_{z=0} = 0$ für $r > c$ auf folgende Bedingung für $g(\alpha)$:

$$\int_0^\infty \alpha\, g(\alpha) J_0(\alpha r) e^{-\alpha k} \, d\alpha = \int_0^\infty \sin c\alpha\, J_0(\alpha r) e^{-\alpha k} \, d\alpha \qquad \text{für } r > c \quad \ldots \ldots \quad (16).$$

Oder als Gleichung für $\sigma(\beta)$ geschrieben:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \sigma(\beta) J_{1+\beta}(\alpha c) J_0(\alpha r) \cdot \alpha e^{-\alpha k} \, d\alpha \, d\beta = \int_0^\infty \sin c\alpha\, J_0(\alpha r) e^{-\alpha k} \, d\alpha, \qquad r > c.$$

Es bleibt zu prüfen, ob diese Bedingung noch mit den beiden (bzw. drei) anderen Bedingungen für $g(\alpha)$ bzw. $\sigma(\beta)$ — Nr. 4, s. auch Gl. (10) — verträglich ist. Doch kann dies geschlossen werden, da damit erst über alle Ränder verfügt ist. An Stelle der halbzahligen β-Intervalle wählt man jetzt zweckmäßig β-Intervalle von der Größe $\frac{1}{3}$. Die Funktion $h(\alpha)$ ist aber nach wie vor schon durch die beiden Bedingungen a), d) bestimmt. Bezüglich der Eindeutigkeit der in Nr. 2 bis 6 gewonnenen Lösung ist daher zu sagen:

Die Lösung ist die einzige, die den in Nr. 3 formulierten Bedingungen a) bis e) genügt und für τ_{rz} (und σ_z) die oben in Nr. 7 angegebenen Verteilungen längs $z = 0$, $r > c$ liefert. Wir hatten — wie das auch manchmal bei der Behandlung ebener Randwertprobleme (mittels konformer Abbildung) geschieht —, die Bedingungen für $z = 0$ noch freigelassen und können jetzt nachträglich die mit der gewonnenen Lösung sich einstellenden Randwerte $(\tau_{rz})_{z=0}$, $(\sigma_z)_{z=0}$ als vorgeschrieben denken. Da beide Werte nur in unmittelbarer Umgebung von $r = c$, $z = 0$ merklich von Null verschieden sind, wird wegen der stetigen Abhängigkeit von den Randbedingungen unsere Lösung nicht sehr von derjenigen abweichen, für die $(\tau_{rz})_{z=0}$ und $(\sigma_z)_{z=0}$ exakt Null sind. Diese exakte Lösung könnten wir aber unter Berücksichtigung der Gln. (15), (16) ebenfalls mittels unseres Verfahrens gewinnen. Wir werden hierauf zusammen mit der weiteren numerischen Auswertung in einer späteren Mitteilung zurückkommen.

8. Weitere Diskussion.

Bild 3 zeigt die mit unserer nullten Näherung errechnete Schubspannungsverteilung — d. h. wiederum $\frac{\tau_{rz}}{\pi G} M$ — längs des Zylindermantels, die wegen der Randbedingung c) zugleich — bis auf den Faktor f_0 — die Normalspannungsverteilung wiedergibt. Das Bild zeigt, daß

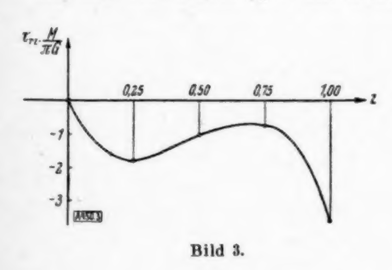


Bild 3.

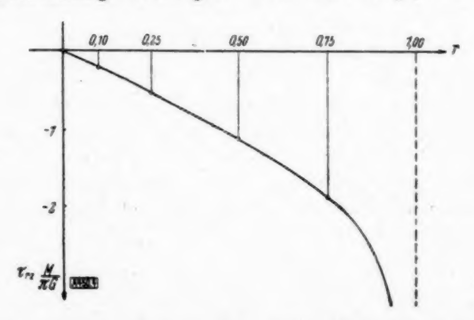


Bild 4 (rechts).

die Normalspannung durchweg von einerlei Vorzeichen, ein Ablösen des elastischen Mediums vom Zylinderrand also nicht zu erwarten und daher die Randbedingung c) wirklich sinnvoll ist. Bild 4 endlich zeigt die Verteilung der Schubspannung, d. h. von $\frac{\tau_{rz}}{\pi G} M$ am Deckel des Zylinders. Für $r = c$ ist τ_{rz} unendlich groß. (Der Meridianschnitt des elastischen Mediums hat an dieser Stelle den Innenwinkel $\frac{3\pi}{2}$, s. Bild 1.) Dabei wird τ_{rz} aber von niedrigerer als erster Ordnung unendlich; denn mit $\sigma(\beta)$ geschrieben ist

$$\tau_{rz} = \int_0^\infty \int_0^\infty \sigma(\beta) J_1(\alpha r) J_{1+\beta}(\alpha c) \alpha^{1-\beta} \, d\alpha \, d\beta .$$

Nun gilt für jedes feste β und $c = 1$:

$$\int_0^\infty J_1(\alpha r) J_{1+\beta}(\alpha c) \alpha^{1-\beta} \, d\alpha = \frac{2^{1-\beta} \cdot r}{\Pi(-\beta - 1)(1 - r^2)^{1-\beta}} .$$

Ein Pol liegt also vor für $0 < \beta < 1$. Er tritt auch auf, wenn die Forderung $(\tau_{rz})_{z=0} = 0$ — Nr. 7, Gl. (15) — gestellt wird; in diesem Falle erhält τ_{rz} ein Zusatzglied, das für $r > c$ singulär wird wie die hypergeometrische Funktion $F\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2+\beta, z\right)_{z=1}$

Von Interesse ist ferner der Widerstand W, den der Zylinder beim Eindrücken in das Medium in Richtung der z-Achse erfährt. Er ist gegeben durch den Ausdruck

$$W = 2\pi \int_0^c \sigma_z r \, dr + 2\pi \int_0^k \tau_{rz} \, dz ,$$

da längs des Deckels nur die Normalspannung, längs des Mantels nur die Schubspannung einen Beitrag zu W liefert. Unter Benützung der für σ_z und τ_{rz} sich ergebenden Werte — es ist

$$\tau_{rz} = G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \chi}{\partial r}\right), \quad \sigma_z = 2\,G\left[\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{1}{m-2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{\eta}{r} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)\right] -$$

erhält man schließlich für $\frac{W}{G}$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{W}{G} &= c\,(1 - p\,(m-2)) \int_0^\infty g(\alpha) J_1(\alpha c) \, d\alpha + (3p+1) \int_0^\infty (e^{-\alpha k} - 1)\, g(\alpha) J_1(\alpha c) \, d\alpha \\ &+ 2\,p\,k \int_0^\infty \alpha\, e^{-\alpha k} g(\alpha) J_1(\alpha c) \, d\alpha \\ &+ M\left\{\frac{8c}{m-2}((m-2)(p-1) - 1) + \frac{6p-2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha k} - 1}{\alpha} \sin c\alpha\, J_1(\alpha c) \, d\alpha \right. \\ &\left. + \frac{4\,p\,k}{\pi} \int_0^\infty \sin c\alpha\, J_1(\alpha c)\, e^{-\alpha k} \, d\alpha \right\} \end{aligned}\right\} \quad (17).$$

Die Größe M (die Strecke, um die der Zylinder in das elastische Medium eingedrückt wird), ist auch in allen Gliedern des ersten Teils der rechten Seite von Gl. (17) als linearer Faktor enthalten. Denn nach Ersatz der Funktion $g(\alpha)$ durch die darstellenden Reihen (9) haben alle Koeffizienten a_ν, b_ν den Faktor M. Die rechten Seiten des Gleichungssystems (11), (12) zur Bestimmung der a_ν, b_ν sind nämlich durchweg Integrale der Form $\varkappa^n_{\varrho\sigma}$ — Gl. (14) —, die alle den Faktor M enthalten. Daher kann jetzt mit Hilfe der Gl. (15) M durch den Gesamtdruck W des Stempels ausgedrückt werden:

$$M = A \cdot W ,$$

wo A ein durch die bestimmten Integrale und konstanten Faktoren festgelegter Ausdruck ist.

Endlich erhält man für die Radialverschiebung ϱ längs des Deckels:

$$\varrho = \varphi(r)_{z=\varkappa} = \int_0^\infty g(\alpha) J_1(\alpha r) \, d\alpha .$$

Man zeigt leicht, daß ϱ negativ wird, das elastische Medium wird also unter dem Stempel nach innen zusammengedrückt.

9. Die allgemeine Rotationsfläche.

Das eingeschlagene Verfahren läßt sich grundsätzlich auch für eine beliebige Rotationsfläche verwenden. Man geht wiederum aus von den unter Nr. 2 aufgestellten Partikulärlösungen und baut jetzt die allgemeine Lösung hieraus etwa in der Form:

$$\varphi = \int_0^\infty g(a) \cdot J_1(a r) e^{-a z} \, \mathrm{d} a - p z \int_0^\infty [g(a) - h(a)] \, a \, J_1(a r) e^{-a z} \, \mathrm{d} a ,$$

$$\chi = \int_0^\infty h(a) \; J_0(a r) e^{-a z} \, \mathrm{d} a - p z \int_0^\infty [p(a) - h(a)] \, a \, J_0(a r) e^{-a z} \, \mathrm{d} a$$

auf. Für die Berandung $z = f(r)$ der Rotationsfläche und längs der Oberfläche $z = 0$ des elastischen Mediums sind irgendwelche Randbedingungen vorzuschreiben, durch die die Funktionen $g(a)$ und $h(a)$ wiederum mittels linearer Integralgleichungen erster Art festgelegt werden. Wenn nur eine Berandung $z = f(r)$ mit geschlossener Darstellung vorliegt, erscheinen die Randbedingungen z. B. in folgender Form:

$$\left. \begin{matrix} \varphi_{z=f(r)} = A & \chi_{z=f(r)} = B \\ (\tau_{rz})_{z=0} = 0 & (\sigma_z)_{z=0} = 0 \end{matrix} \right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18).$$

Für $g(a)$ und $h(a)$ sind jetzt möglichst Reihen nach den Funktionen $\chi_n(a)$ eines solchen abgeschlossenen Funktionensystems anzusetzen, daß zwei von den vier Bedingungen (18) schon erfüllt werden. Die beiden anderen Gleichungen sind dann in geeigneter Weise mit den Funktionen $\psi_n(r)$ eines vollständigen Orthogonalsystems zu multiplizieren, es ist nach r zu integrieren und man erhält auf diese Weise $2 \times \infty^1$ Gleichungen für die $2 \times \infty^1$ unbekannten Koeffizienten der Reihen für $g(a)$ und $h(a)$. Ohne Berücksichtigung der Bedingungen für $z = 0$ ist es jetzt u. U. möglich, für $\chi_n(a)$ und $\psi_n(r)$ die Funktionen ein und desselben Systems zu wählen und damit mittels des in Nr. 5 geschilderten Verfahrens — s. Anm. 9 — unmittelbar die Fourierkoeffizienten von $g(a), h(a)$ in bezug auf die $\chi_n(a)$ zu bestimmen, ohne auf das unendliche Gleichungssystem zurückgreifen zu müssen.

Den Herren Prof. Dr. Haack und Prof. Dr. Sonntag danke ich für das der Arbeit entgegengebrachte Interesse. 450

Zur Stabilität der elastischen Schalen II*)

Von *Ernst-August Deuker* in Hannover.

VIII. Die Stabilität einer geschlossenen Kugelschale unter gleichförmigem Außendruck.

Die Stabilität einer geschlossenen Kugelschale, die durch einen gleichmäßigen äußeren Normaldruck beansprucht wird, hat zuerst R. Zoelly untersucht[14]. R. Zoelly sowohl wie auch E. Schwerin[15] beschränken sich jedoch auf rotationssymmetrische Knickfiguren. Von dieser Beschränkung hat sich erst A. van der Neut freigemacht[16]. Die in dieser Arbeit entwickelten Methoden zeigen auf, daß dieses Stabilitätsproblem einige hervorragende Eigenschaften besitzt, die es zu einer der einfachsten Aufgaben der Stabilitätstheorie dünner Schalen machen.

Es lassen sich drei Gründe angeben, die in ihrer Gesamtheit die analytische Behandlung der Aufgabe wesentlich erleichtern:

1. Eine besondere Eigenschaft der Kugel.
2. Die Symmetrie der Grundlösung, die durch 1. bedingt ist.
3. Das Fehlen von Randbedingungen, die durch die Forderung zu ersetzen sind, daß die Lösungen auf der ganzen Kugel regulär bleiben.

Als körperfeste Koordinaten auf der unverformten Mittelfläche mit dem Radius a wählen wir die Poldistanz q_1 und die Länge q_2. Das Koordinatensystem ist rechtwinklig, und die Komponenten des Maß- bzw. Krümmungstensors haben die Werte:

$$\left. \begin{matrix} g_{11}^{(0)} = a^2; & g_{12}^{(0)} = 0; & g_{22}^{(0)} = a^2 \sin^2 q_1 \\ \varkappa_{11}^{(0)} = - a \,; & \varkappa_{12}^{(0)} = 0; & \varkappa_{22}^{(0)} = - a \, \sin^2 q_1 \end{matrix} \right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8.1).$$

Die besondere Eigenschaft der Kugel besteht darin, daß ihr Krümmungstensor dem Maßtensor proportional ist. Es gelten nämlich die Beziehungen:

*) Die Abschnitte I bis VII sind in dieser Zeitschrift Bd. 23 (1943), S. 81 bis 100 erschienen.
[14]) Vgl. [11]. [15]) Vgl. [9]. [16]) Vgl. [7].

$$\overset{(0)}{\varkappa}_{\varrho\sigma} = -\frac{1}{a}\, g^{(0)}_{\varrho\sigma}; \qquad \overset{(0)}{\varkappa}{}^{\mu}_{\sigma} = -\frac{1}{a}\,\delta^{\mu}_{\sigma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8.2).$$

Unter dem Einfluß des konstanten Außendruckes p [kg cm^{-2}] geht die Mittelfläche in eine Kugel von etwas kleinerem Radius über. Für den Grundzustand bleiben deshalb die Beziehungen (8.2) erhalten, nur daß statt des Radius a der etwas kleinere Radius zu nehmen ist. Die Änderung des ursprünglichen Radius ist jedoch so gering, daß sie in den Gleichgewichtsbedingungen (3.7) bei der Berechnung der Grundspannungen unberücksichtigt bleiben kann. Die Gleichgewichtsbedingungen erhalten dann die Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{{}^{(0)}\mathfrak{d}\, T^{\mu}_{\lambda}}{\mathfrak{d}\, q^{\mu}} = 0 \\ &\frac{{}^{(0)}\mathfrak{d}^2 M^{\mu\lambda}}{\mathfrak{d}\, q^{\lambda}\,\mathfrak{d}\, q^{\mu}} - \frac{1}{a}\,\delta^{\sigma}_{\mu}\, T^{\mu}_{\sigma} + \frac{1}{a^2}\,\delta^{\mu}_{\sigma}\, M^{\sigma}_{\mu} - p\left(1+\frac{h}{2a}\right)^2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (8.3).$$

Sie haben die spezielle Lösung:

$$\overset{(0)}{T}{}^{\sigma}_{\mu} = -T\,\delta^{\sigma}_{\mu}; \qquad \overset{(0)}{M}{}^{\sigma}_{\mu} = -M\,\delta^{\sigma}_{\mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8.4.)$$

Zur Bestimmung von T und M reichen die Gleichgewichtsbedingungen jedoch nicht aus, es ist notwendig, den Zusammenhang von T und M mit der Normalverschiebung zu betrachten. Man findet dann, daß sich M und T verhält, wie $\frac{h^2}{12\,a}:1$. M ist also sehr klein gegenüber T. Man sieht hier, daß das Nullsetzen der Momente bei der Membranlösung mit der Verformung zwar nicht im Einklang steht, der Fehler aber unbedeutend ist, so daß wir M gleich Null setzen können. Für die Konstante T erhält man dann den Wert:

$$T = \frac{a\,p}{2}\left(1+\frac{h}{2a}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8.5),$$

wo, wie beim Kreiszylinder, der Klammerfaktor noch gleich 1 gesetzt werden kann.

Die Gl. (8.4) zeigen die große Symmetrie der Grundlösung. Wie auf der Kugelfläche die Krümmung in einem Punkt für jede Schnittrichtung gleich ist, so auch im Falle konstanter Normalbelastung die Spannung. Die Tatsache, daß die Komponenten $\overset{(0)}{\varkappa}{}^{\mu}_{\varrho}$ und $\overset{(0)}{T}{}^{\sigma}_{\mu}$ in jedem Koordinatensystem auf der Kugel die gleichen Werte annehmen, gestattet es, die folgenden Rechnungen ohne Benutzung eines speziellen Koordinatensystems durchzuführen, und ist der innere Grund dafür, daß bei der Betrachtung nichtrotationssymmetrischer Knickfiguren keine Änderung der Knicklasten gegenüber dem rotationssymmetrischen Fall auftritt, was zuerst Verwunderung erregt hat, durch die Invarianz der Tensorgleichungen (8.2) und (8.4) aber unmittelbar erklärt wird. Wir behandeln das Stabilitätsproblem zunächst nach Ziffer V an Hand der Gleichgewichtsbedingungen.

Unter Berücksichtigung von (8.2) erhält man aus (6.7) und (6.11) für die Variationen der Komponenten des bzw. Maß- und Krümmungstensors der verformten Mittelfläche die nachstehenden Ausdrücke, wenn man statt der Normalverschiebung $\delta\, v_3$ noch die dimensionslose Größe $\delta\, w = \frac{\delta\, v_3}{a}$ einführt.

$$\delta\, g_{\varrho\sigma} = \frac{{}^{(0)}\mathfrak{d}\, v_{\sigma}}{\mathfrak{d}\, q^{\varrho}} + \frac{{}^{(0)}\mathfrak{d}\, v_{\varrho}}{\mathfrak{d}\, q^{\sigma}} + 2\, g^{(0)}_{\varrho\sigma}\,\delta\, w \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8.6),$$

$$\delta\,\varkappa^{\mu}_{\sigma} = a\, g^{\varrho\mu}_{(0)}\,\frac{{}^{(0)}\mathfrak{d}^2\,\delta\, w}{\mathfrak{d}\, q^{\varrho}\,\mathfrak{d}\, q^{\sigma}} + \frac{1}{a}\,\delta^{\mu}_{\sigma}\,\delta\, w \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8.7).$$

Da in den folgenden Formeln die kovariante Ableitung stets auf das unverformten System bezogen ist, lassen wir den Index $^{(0)}$ von jetzt ab fort und schreiben $\mathfrak{d}$ statt $^{(0)}\mathfrak{d}$.

Für die Ableitungen der in Frage kommenden Größen nach t, genommen für $t=0$, gelten dieselben Betrachtungen, auch hinsichtlich der Bezeichnungen, wie sie beim Kreiszylinder angestellt worden sind.

Die Berechnung der $\delta^*\,\varepsilon^{\mu}_{\lambda}$ führt hier zu den Ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} \delta^*\,\varepsilon^{\mu}_{\lambda} = \frac{1}{2}\Big\{ & g^{\mu\varrho}_{(0)}\,\frac{\mathfrak{d}\,\delta\, v_{\lambda}}{\mathfrak{d}\, q_{\varrho}} + \frac{\mathfrak{d}\,\delta\, v^{\mu}}{\mathfrak{d}\, q^{\lambda}} + 2\,\delta^{\mu}_{\lambda}\,\delta\, w\Big\} \\ & - \frac{q_3}{a}\left\{a^2\, g^{\mu\varrho}_{(0)}\,\frac{\mathfrak{d}^2\,\delta\, w}{\mathfrak{d}\, q^{\varrho}\,\mathfrak{d}\, q^{\lambda}} + \delta^{\mu}_{\lambda}\,\delta\, w\right\}\left(1-\frac{q_3}{a}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (8.8).$$

Bei der Konstruktion des Längstkrafttensors und des Momententensors ist es jetzt aber zweckmäßig, zunächst den Schubmodul G und die Querdehnungszahl m als elastische Konstante zu wählen. Weiter setzen wir wieder

$$\frac{h^2}{12\,a^2}=k$$

und führen die Invariante

$$\delta e=\frac{\mathfrak{d}\,\delta\,v^\varrho}{\mathfrak{d}\,q^\varrho}$$

sowie den invarianten Differentialoperator

$$L=a^2\,g_{(0)}^{\varrho\sigma}\frac{\mathfrak{d}^2}{\mathfrak{d}\,q^\varrho\,\mathfrak{d}\,q^\sigma}+2$$

ein, der in engem Zusammenhang mit dem Differentialoperator von Beltrami steht. Man erhält so:

$$\left.\begin{aligned}
\delta\,T_\lambda^\mu &= G\,h\left\{(1+k)\left[g_{(0)}^{\mu\varrho}\frac{\mathfrak{d}\,\delta\,v_\lambda}{\mathfrak{d}\,q^\varrho}+\frac{\mathfrak{d}\,\delta\,v^\mu}{\mathfrak{d}\,q^\lambda}+2\,\delta_\lambda^\mu\,\delta\,w+2\,\frac{\delta_\lambda^\mu}{m-1}(\delta\,e+2\,\delta\,w)\right]\right.\\
&\qquad\left.-2\,k\left[a^2\,g_{(0)}^{\mu\varrho}\frac{\mathfrak{d}^2\,\delta\,w}{\mathfrak{d}\,q^\varrho\,\mathfrak{d}\,q^\lambda}+\delta_\lambda^\mu\,w+\frac{\delta_\lambda^\mu}{m-1}\,L\,(\delta\,w)\right]\right\}\\
\delta\,M_\lambda^\mu &= 2\,G\,h\,a\,k\left\{\left[g_{(0)}^{\mu\varrho}\frac{\mathfrak{d}\,\delta\,v_\lambda}{\mathfrak{d}\,q^\varrho}+\frac{\mathfrak{d}\,\delta\,v^\mu}{\mathfrak{d}\,q^\lambda}+2\,\delta_\lambda^\mu\,\delta\,w+2\,\frac{\delta_\lambda^\mu}{m-1}(\delta\,e+2\,\delta\,w)\right]\right.\\
&\qquad\left.-\left[a^2\,g_{(0)}^{\mu\varrho}\frac{\mathfrak{d}^2\,\delta\,w}{\mathfrak{d}\,q^\varrho\,\mathfrak{d}\,q^\lambda}+\delta_\lambda^\mu\,\delta\,w+\frac{\delta_\lambda^\mu}{m-1}\,L\,(\delta\,w)\right]\right\}
\end{aligned}\right\}\quad .\;.\;(8.9).$$

Die hochgradige Symmetrie der Kugel macht sich in dem vollkommen gleichartigen Aufbau von Längskraft und Momententensor geltend.

Wir sind nun in der Lage, die Stabilitätsgleichungen aufzustellen. Es zeigt sich, daß die Grundlösung (8.5) in die ersten beiden Gleichungen gar nicht eingeht, da die Differenz

$$\begin{Bmatrix}\varrho\,\mu\\ \mu\end{Bmatrix}T_\lambda^\varrho-\begin{Bmatrix}\lambda\,\mu\\ \varrho\end{Bmatrix}T_\varrho^\mu$$

für $T_\varrho^\mu=-\,T\delta_\varrho^\mu$ identisch verschwindet. Die Spur des variierten Krümmungstensors ist gleich $\frac{1}{a}\,L\,(\delta\,w)$, so daß die Stabilitätsgleichungen (5.2) die einfache Form annehmen:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathfrak{d}\,\delta\,T_\lambda^\mu}{\mathfrak{d}\,q^\mu}=0\\
&\frac{\mathfrak{d}^2\,\delta\,M^{\mu\lambda}}{\mathfrak{d}\,q^\lambda\,\mathfrak{d}\,q^\mu}-\frac{1}{a}\,\delta\,T_\sigma^\sigma+\frac{1}{a^2}\,\delta\,M_\sigma^\sigma-\frac{1}{a}\,T\,L\,(\delta\,w)=0
\end{aligned}\right\}\quad .\;.\;.\;.\;.\;.\;(8.10).$$

Wir führen in die ersten beiden Gleichungen die Ausdrücke (8.9) ein und erhalten:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{d}\,\delta\,T_\lambda^\mu}{\mathfrak{d}\,q^\mu} &= G\,h\left\{(1+k)\left[g_{(0)}^{\mu\varrho}\frac{\mathfrak{d}^2\,\delta\,v_\lambda}{\mathfrak{d}\,q^\mu\,\mathfrak{d}\,q^\varrho}+\frac{\mathfrak{d}^2\,\delta\,v^\mu}{\mathfrak{d}\,q^\mu\,\mathfrak{d}\,q^\lambda}+2\,\frac{\partial\,\delta\,w}{\partial\,q^\lambda}+\frac{2}{m-1}\,\frac{\partial}{\partial\,q^\lambda}(\delta\,e+2\,\delta\,w)\right]\right.\\
&\qquad\left.-2\,k\left[a^2\,g_{(0)}^{\mu\varrho}\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}\,q^\mu}\left(\frac{\mathfrak{d}^2\,\delta\,w}{\mathfrak{d}\,q^\lambda\,\mathfrak{d}\,q^\varrho}\right)+\frac{\partial\,\delta\,w}{\partial\,q^\lambda}+\frac{1}{m-1}\,\frac{\partial\,L(\delta\,w)}{\partial\,q^\lambda}\right]\right\}=0
\end{aligned}\right\}\;.\;(8.11).$$

Es empfiehlt sich in die Gl. (8.11), außer der bereits auftretenden Divergenz $\delta\,e=\frac{\mathfrak{d}\,\delta\,v^\varrho}{\mathfrak{d}\,q^\varrho}$, den Drehtensor:

$$\delta\,\omega_{\mu\,\lambda}=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{d}\,\delta\,v_\lambda}{\mathfrak{d}\,q^\mu}-\frac{\mathfrak{d}\,\delta\,v_\mu}{\mathfrak{d}\,q^\lambda}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\,\delta\,v_\lambda}{\partial\,q^\mu}-\frac{\partial\,\delta\,v_\mu}{\partial\,q^\lambda}\right)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(8.12)$$

einzuführen. Wir geben zu diesem Zweck den Gl. (8.11) die Form:

$$\left.\begin{aligned}
&(1+k)\left\{\frac{2\,m}{m-1}\,\frac{\partial}{\partial\,q^\lambda}(\delta\,e+2\,\delta\,w)+g_{(0)}^{\varrho\mu}\frac{\mathfrak{d}^2\,\delta\,v_\lambda}{\mathfrak{d}\,q^\mu\,\mathfrak{d}\,q^\varrho}-\frac{\mathfrak{d}^2\,\delta\,v^\mu}{\mathfrak{d}\,q^\lambda\,\mathfrak{d}\,q^\mu}\right.\\
&\qquad\left.-2\,\frac{\partial\,\delta\,w}{\partial\,q^\lambda}+\frac{\mathfrak{d}^2\,\delta\,v^\mu}{\mathfrak{d}\,q^\mu\,\mathfrak{d}\,q^\lambda}-\frac{\mathfrak{d}^2\,\delta\,v^\mu}{\mathfrak{d}\,q^\lambda\,\mathfrak{d}\,q^\mu}\right\}-2\,k\,\frac{m}{m-1}\,\frac{\partial\,L\,(\delta\,w)}{\partial\,q^\lambda}\\
&\qquad-2\,k\left\{a^2\,g_{(0)}^{\mu\varrho}\left[\frac{\mathfrak{d}^2}{\mathfrak{d}\,q^\mu\,\mathfrak{d}\,q^\lambda}\left(\frac{\partial\,\delta\,w}{\partial\,q^\varrho}\right)-\frac{\mathfrak{d}^2}{\mathfrak{d}\,q^\lambda\,\mathfrak{d}\,q^\mu}\left(\frac{\partial\,\delta\,w}{\partial\,q^\varrho}\right)\right]-\frac{\partial\,\delta\,w}{\partial\,q^\lambda}\right\}=0
\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;(8.11\,a).$$

Die Differenzen der zweiten kovarianten Ableitungen eines kovarianten Vektors sind nach Gl. (6.14) zu bestimmen. Danach gilt:

$$\frac{\mathfrak{d}^2 \delta v^\mu}{\mathfrak{d} q^\mu \mathfrak{d} q^\lambda} - \frac{\mathfrak{d}^2 \delta v^\mu}{\mathfrak{d} q^\lambda \mathfrak{d} q^\mu} = g^{\mu\sigma}_{(0)} \, {}^{(0)}R^{\nu}_{\cdot\sigma\lambda\mu} \, \delta v_\nu$$

$$a^2 g^{\mu\varrho}_{(0)} \left[\frac{\mathfrak{d}^2}{\mathfrak{d} q^\mu \mathfrak{d} q^\lambda}\left(\frac{\partial \delta w}{\partial q^\varrho}\right) - \frac{\mathfrak{d}^2}{\mathfrak{d} q^\lambda \mathfrak{d} q^\mu}\left(\frac{\partial \delta w}{\partial q^\varrho}\right)\right] = a^2 g^{\mu\varrho}_{(0)} \, {}^{(0)}R^{\nu}_{\cdot\varrho\lambda\mu} \frac{\partial \delta w}{\partial q^\nu}$$

Die Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors werden speziell für die Kugel dargestellt durch:

$${}^{(0)}R_{\tau\varrho\lambda\mu} = \frac{1}{a^2}\left(g^{(0)}_{\tau\lambda} g^{(0)}_{\varrho\mu} - g^{(0)}_{\tau\mu} g^{(0)}_{\varrho\lambda}\right).$$

Die betreffenden Differenzen von kovarianten Ableitungen gehen damit über in:

$$\frac{\mathfrak{d}^2 \delta v^\mu}{\mathfrak{d} q^\mu \mathfrak{d} q^\lambda} - \frac{\mathfrak{d}^2 \delta v^\mu}{\mathfrak{d} q^\lambda \mathfrak{d} q^\mu} = \frac{1}{a^2}\delta v_\lambda \qquad a^2 g^{\mu\varrho}_{(0)} \left\{\frac{\mathfrak{d}^2}{\mathfrak{d} q^\mu \mathfrak{d} q^\lambda}\left(\frac{\partial \delta w}{\partial q^\varrho}\right) - \frac{\mathfrak{d}^2}{\mathfrak{d} q^\lambda \mathfrak{d} q^\mu}\left(\frac{\partial \delta w}{\partial q^\varrho}\right)\right\} = \frac{\partial \delta w}{\partial q^\lambda}.$$

Ferner gilt:

$$g^{\varrho\mu}_{(0)} \frac{\mathfrak{d}^2 \delta v_\lambda}{\mathfrak{d} q^\mu \mathfrak{d} q^\varrho} - \frac{\mathfrak{d}^2 \delta v^\mu}{\mathfrak{d} q^\lambda \mathfrak{d} q^\mu} = g^{\varrho\mu}_{(0)}\left\{\frac{\mathfrak{d}^2 \delta v_\lambda}{\mathfrak{d} q^\mu \mathfrak{d} q^\varrho} - \frac{\mathfrak{d}^2 \delta v_\mu}{\mathfrak{d} q^\lambda \mathfrak{d} q^\varrho}\right\}$$

$$= \left\{g^{\varrho\mu}_{(0)} \frac{\mathfrak{d}^2 \delta v_\lambda}{\mathfrak{d} q^\varrho \mathfrak{d} q^\mu} - \frac{\mathfrak{d}^2 \delta v_\mu}{\mathfrak{d} q^\varrho \mathfrak{d} q^\lambda} + \left({}^{(0)}R^{\nu}_{\cdot\lambda\varrho\mu} - {}^{(0)}R^{\nu}_{\cdot\mu\varrho\lambda}\right)\delta v_\nu\right\}$$

$$= g^{\varrho\mu}_{(0)} \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d} q^\varrho}\left\{\frac{\mathfrak{d}\delta v_\lambda}{\mathfrak{d} q^\mu} - \frac{\mathfrak{d}\delta v_\mu}{\mathfrak{d} q^\lambda}\right\} + \frac{1}{a^2}\,\delta v_\lambda$$

$$= 2 g^{\varrho\mu}_{(0)} \frac{\mathfrak{d}\,\delta\omega_{\mu\lambda}}{\mathfrak{d} q^\varrho} + \frac{1}{a^2}\,\delta v_\lambda = 2\frac{\mathfrak{d}\,\delta\omega^{\varrho}_{\cdot\lambda}}{\mathfrak{d} q^\varrho} + \frac{1}{a^2}\,\delta v_\lambda.$$

Die Gl. (8.11a) erhalten unter Berücksichtigung obiger Gleichungen eine überraschend einfache Form. Nach Division durch $\frac{2m}{m-1}$ und mit $\frac{1}{m} = \nu$ ergeben sie sich zu:

$$(1+k)\left\{\frac{\partial(\delta e + 2\,\delta w)}{\partial q^\lambda} + (1-\nu)\left[\frac{\mathfrak{d}\,\delta\omega^{\varrho}_{\cdot\lambda}}{\mathfrak{d} q^\varrho} + \frac{1}{a^2}\,\delta v_\lambda - \frac{\partial \delta w}{\partial q^\lambda}\right]\right\} - k\,\frac{\partial L(\delta w)}{\partial q^\lambda} = 0 \quad . \; . \quad (8.13).$$

Um nun die dritte Stabilitätsgleichung aufzustellen, braucht man nur $\frac{\mathfrak{d}\,\delta M^{\mu}_{\lambda}}{\mathfrak{d} q^\mu}$ aus den Gl. (8.9), (8.11) und (8.13) abzulesen:

$$\frac{\mathfrak{d}\,\delta M^{\mu}_{\lambda}}{\mathfrak{d} q^\mu} = \frac{E h a k}{1-\nu^2}\left\{2\left[\frac{\partial(\delta e + 2\,\delta w)}{\partial q^\lambda} + (1-\nu)\left(\frac{\mathfrak{d}\omega^{\varrho}_{\cdot\lambda}}{\mathfrak{d} q^\varrho} + \frac{1}{a^2}\,\delta v_\lambda - \frac{\partial \delta w}{\partial q^\lambda}\right)\right] - \frac{\partial L(\delta w)}{\partial q^\lambda}\right\}$$

und erhält unter Berücksichtigung von (8.13) zunächst:

$$\frac{\mathfrak{d}\,\delta M^{\mu}_{\lambda}}{\mathfrak{d} q^\mu} = -\frac{E h a k}{1-\nu^2}\,\frac{1-k}{1+k}\,\frac{\partial L(\delta w)}{\partial q^\lambda} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8.14).$$

Die Invariante $\frac{\mathfrak{d}^2 \delta M^{\mu\lambda}}{\mathfrak{d} q^\lambda \mathfrak{d} q^\mu}$ ist nun nach Gl. (8.14) leicht zu berechnen, wenn man sich an die Definition des Operators L erinnert. Die mehrfache Anwendung des Operators bezeichnen wir durch die entsprechende Potenz von L und können dann schreiben:

$$\frac{\mathfrak{d}^2 \delta M^{\mu\lambda}}{\mathfrak{d} q^\lambda \mathfrak{d} q^\mu} = -\frac{E h k}{a(1-\nu^2)}\,\frac{1-k}{1+k}\left\{L^2(\delta w) - 2\,L(\delta w)\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8.15).$$

Die in der dritten Stabilitätsgleichung auftretenden ersten Invarianten $\delta T^{\sigma}_{\sigma}$ (des Längskrafttensors) und $\delta M^{\sigma}_{\sigma}$ (des Momententensors) ergeben sich zu:

$$\delta T^{\sigma}_{\sigma} = G h \left\{(1+k)\left[2(\delta e + 2\,\delta w) + \frac{4}{m-1}(\delta e + 2\,\delta w)\right] - \frac{2k(m+1)}{m-1} L(\delta w)\right\}$$

$$= \frac{E h}{1-\nu^2}(1+\nu)\{(1+k)(\delta e + 2\,\delta w) - k\,L(\delta w)\}$$

$$\delta M^{\sigma}_{\sigma} = \frac{E h a k}{1-\nu^2}(1+\nu)\{2(\delta e + 2\,\delta w) - L(\delta w)\}\,.$$

Setzt man noch zur Abkürzung

$$\frac{T(1-\nu^2)}{E h} = \varrho,$$

so lautet die dritte Stabilitätsgleichung (8.10)

$$k\,\{L^2(\delta w) - 2\,L(\delta w)\} + (1+\nu)(1+k)(\delta e + 2\,\delta w) + \varrho\,\frac{1+k}{1-k} L(\delta w) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (8.16).$$

Wir kehren nun zu den Gl. (8.13) zurück. Die linken Seiten stellen die kovarianten Komponenten eines Nullvektors dar. Die Divergenz und der Drehtensor dieses Vektors verschwinden natürlich, d. h. aus (8.13) folgen die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} (1+k)\,\{L(\delta e + 2\,\delta w) - 2(\delta e + 2\,\delta w) - (1-\nu)[L(\delta w) - (\delta e + 2\,\delta w)]\} \\ - k\,[L^2(\delta w) - 2\,L(\delta w)] = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad (8.17),$$

$$\frac{\partial^2 \delta\omega^{\varrho}_{\cdot\lambda}}{\partial q^{\mu}\,\partial q^{\varrho}} - \frac{\partial^2 \delta\omega^{\varrho}_{\cdot\mu}}{\partial q^{\lambda}\,\partial q^{\varrho}} + \frac{2}{a^2}\,\delta\omega_{\mu\lambda} = 0 \quad \text{bzw.} \quad g^{\varrho\sigma}_{(0)}\left\{\frac{\partial^2 \delta\omega_{\sigma\lambda}}{\partial q^{\mu}\,\partial q^{\varrho}} - \frac{\partial^2 \delta\omega_{\sigma\mu}}{\partial q^{\lambda}\,\partial q^{\varrho}}\right\} + \frac{2}{a^2}\,\delta\omega_{\mu\lambda} = 0 \quad . \quad . \quad (8.18).$$

Das Bemerkenswerte an diesen Gleichungen ist, daß (8.17) wie (8.16) nur noch δe und δw enthalten, während (8.18) eine Differentialgleichung für den Betrag des Rotors allein ist. Durch eine Umrechnung, die wir hier unterdrücken, kann man (8.18) auf die Form:

$$a^2\, g^{\varrho\sigma}_{(0)} \frac{\partial^2 \delta\omega_{\mu\lambda}}{\partial q^{\varrho}\,\partial q^{\sigma}} + 2\,\delta\omega_{\mu\lambda} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8.18a)$$

bringen. Die Gl. (8.18a) ist aber nicht etwa $L(\delta\omega_{12})$, denn $\delta\omega_{\mu\lambda}$ nimmt zwar bis auf das Vorzeichen nur einen Wert an, $\delta\omega_{12} = -\,\delta\omega_{21}$, ist aber in (8.18a) als schiefsymmetrischer Tensor zu behandeln. Um nun aus der obigen Gleichung eine Invariante zu bilden, multiplizieren wir sie skalar mit einem geeigneten schiefsymmetrischen Tensor mit den Komponenten:

$$\eta^{11} = 0, \quad \eta^{12} = -\,\eta^{21} = \frac{1}{\sqrt{g_0}}, \quad \eta^{22} = 0.$$

Er hat wie der Maßtensor die besondere Eigenschaft, daß seine kovarianten Ableitungen verschwinden. Wir können deshalb schreiben:

$$a^2\, g^{\varrho\sigma}_{(0)} \frac{\partial^2 (\eta^{\mu\lambda}\,\delta\omega_{\mu\lambda})}{\partial q^{\varrho}\,\partial q^{\sigma}} + 2\,\eta^{\mu\lambda}\,\delta\omega_{\mu\lambda} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8.18b),$$

eine Gleichung, die bis auf den Faktor 2 gleichbedeutend ist mit

$$L(\delta\omega) = 0 \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8.19),$$

wobei $\delta\omega = \dfrac{\delta\omega_{12}}{\sqrt{g_0}}$ der absolute Betrag des Rotors ist.

Sind q_1 und q_2 Poldistanz und Länge eines Punktes auf der Kugel, so hat in diesen Koordinaten der Operator L die Gestalt:

$$L \equiv \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \operatorname{ctg} q_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{1}{\sin^2 q_1}\frac{\partial^2}{\partial q_2^2} + 2 \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8.20).$$

Es kommen für $\delta\omega$ nur die Lösungen der Differentialgleichung $L = 0$ in Frage, die auf der ganzen Kugel regulär sind. Außer der trivialen Nullösung ist nur noch die Kugelflächenfunktion 1. Ordnung:

$$Y_1 = A\cos q_1 + \sin q_1\,(a\sin q_2 + b\cos q_2) \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8.21)$$

eine derartige Lösung von $L = 0$.

Durch den zugehörigen Drehtensor:

$$\delta\omega = Y_1;\; \delta\omega_{\mu\lambda} = \eta_{\mu\lambda}\,\delta\omega \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8.22)$$

ist aber keine Verformung, sondern nur eine starre Drehung der Kugel bestimmt. Wir wollen etwas näher darauf eingehen. Aus der allgemein gültigen Definitionsgleichung der starren Verschiebung[17]):

$$\frac{\partial\, \delta v_\lambda}{\partial q^\mu} + \frac{\partial\, \delta v_\mu}{\partial q^\lambda} = 0 \qquad (8.23)$$

läßt sich die Gleichung:

$$\frac{\partial\, \delta \omega_{\mu\lambda}}{\partial q^\sigma} - R^{\varrho}_{\cdot\sigma\mu\lambda}\, \delta v_\varrho = 0 \qquad (8.24)$$

ableiten. Durch Divergenzbildung erhalten wir:

$$\frac{\partial\, \delta \omega^{\varrho}_{\cdot\lambda}}{\partial q^\varrho} - g^{\varrho\mu}\, R^{\tau}_{\cdot\varrho\mu\lambda}\, \delta v_\tau = 0 \qquad (8.25).$$

Die Gl. (8.25) ist bei zwei Veränderlichen mit (8.24) gleichwertig, da diese in dem Falle auch nur zwei verschiedene Gleichungen umfaßt. Nun ist $-g^{\varrho\mu} R^{\tau}_{\cdot\varrho\mu\lambda} = K\,\delta^{\tau}_{\lambda}$ ($K =$ Gaußsches Krümmungsmaß der Fläche), so daß (8.25) übergeht in:

$$\frac{\partial\, \delta \omega^{\varrho}_{\cdot\lambda}}{\partial q^\varrho} + K\, \delta v_\lambda = 0 \qquad (8.25\,\text{a}).$$

Bildet man nun die Divergenz von $\frac{\partial\, \delta \omega^{\varrho\lambda}}{\partial q^\varrho} + K\, \delta v^\lambda$ und beachtet, daß $\frac{\partial^2\, \delta \omega^{\varrho\lambda}}{\partial q^\lambda\, \partial q^\varrho}$ identisch verschwindet, während $\delta e = \frac{\partial\, \delta v^\lambda}{\partial q^\lambda}$ gleich Null ist, weil es sich um eine starre Verschiebung handeln soll, so folgt als weitere Bedingungsgleichung:

$$\frac{\partial K}{\partial q^\lambda}\, \delta v^\lambda = 0 \qquad (8.26),$$

die bei der Kugel als Fläche mit konstanter Krümmung, $K = \frac{1}{a^2}$, identisch erfüllt ist und z. B. für eine beliebige Drehfläche sofort erkennen läßt, daß nur die Drehungen der Fläche als Ganzes um die Rotationsachse in Frage kommen. Andererseits liefert der Rotor von (8.26a) die Differentialgleichung (8.18), von deren Lösungen nur die eine starre Drehung bedeuten, die den aus (8.23) und (8.25) folgenden Bedingungen:

$$\frac{\partial}{\partial q^\varrho}\left\{\eta^{\varrho}_{\cdot\lambda}\, \frac{\partial\, \delta\omega}{\partial q^\mu} + \eta^{\varrho}_{\cdot\mu}\, \frac{\partial\, \delta\omega}{\partial q^\lambda}\right\} = 0 \qquad (8.27)$$

genügen. Man überzeugt sich leicht, daß die Lösung (8.22) diese Bedingungen erfüllt.

Wir sind auf die starren Drehungen etwas ausführlich eingegangen wegen der bemerkenswerten Folgerungen, die sich bei zwei Veränderlichen aus der Gl. (8.24) ziehen lassen. Eine starre Drehung ist ohne Einfluß auf die Formänderungen und kann als nicht vorhanden angesehen werden. Wir dürfen deshalb den Drehtensor bei der geschlossenen Kugelschale gleich Null setzen. Es bleiben also nur noch die beiden Gl. (8.16) und (8.17) für δe und δw. Diese lassen sich nun in besonderer Weise behandeln; denn wegen des Verschwindens des Drehtensors ist es möglich, den Vektor δv_λ als Gradient einer Skalarfunktion einzusetzen:

$$\delta v_\lambda = \frac{\partial U}{\partial q^\lambda} \qquad (8.28).$$

A. van der Neut führt die Integration seiner Stabilitätsgleichungen mit einem dem obigen gleichwertigen Ansatz, der als vereinfachende Annahme eingeführt wird, durch und zeigt nachträglich, daß der allgemeinere Ansatz:

$$\delta v_1 = \frac{\partial U}{\partial q^1}; \quad \delta v_2 = \frac{\partial V}{\partial q^2} \qquad (8.28\,\text{a}),$$

der auch in der Biegetheorie der Kugelschale Eingang gefunden hat, sich hier auf $V = U$ reduziert. Die Brauchbarkeit des Ansatzes (8.28a) beruht darauf, daß es bei der Kugel möglich ist, eine Gleichung allein für $\delta\omega$, d. h. für $V - U$ aufzustellen.

Für unser Stabilitätsproblem genügt es und ist es auch bequemer, mit δe und δw zu rechnen. Durch Addition der beiden Gl. (8.16) und (8.17) erhält man eine einfache Beziehung zwischen δe und δw, die es uns ermöglicht, δe zu eliminieren. Diese Beziehung lautet:

[17]) Vgl. [2], [3].

$$(1+k)\left\{L(\delta e+2\,\delta w)-(1-\nu)\,L(\delta w)+\frac{\varrho}{1-k}\,L(\delta w)\right\}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8.29)$$

Wir wenden nun auf die Gl. (8.16) noch einmal den Operator L an und erhalten unter Berücksichtigung von (8.29) eine Differentialgleichung, die nur noch δw enthält:

$$k\{L^3(\delta w)-2\,L^2(\delta w)\}+(1+k)(1-\nu^2)\,L(\delta w)+\varrho\,\frac{1+k}{1-k}\{L^2(\delta w)-(1+\nu)\,L(\delta w)\}=0 \quad . \quad (8.30).$$

Von den Lösungen dieser Differentialgleichung kommen wieder nur solche in Betracht, die auf der ganzen Kugel regulär sind. Nun läßt sich die partielle Differentialgleichung 6. Ordnung für δw in bekannter Weise durch den Ansatz:

$$L(\delta w)=-\lambda\,\delta w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8.31)$$

in drei Differentialgleichungen von der 2. Ordnung aufspalten, wobei der Parameter λ der kubischen Gleichung:

$$\lambda\left[\lambda^2+2\,\lambda+\frac{1+k}{k}(1-\nu^2)-\frac{\varrho}{k}\,\frac{1+k}{1-k}\{\lambda+1+\nu\}\right]=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8.32)$$

zu genügen hat. Die drei Wurzeln dieser kubischen Gleichung sind:

$$\lambda_1=0; \quad \lambda_{1,2}=\frac{1+k}{1-k}\,\frac{\varrho}{2\,k}-1\pm\sqrt{\left(\frac{1+k}{1-k}\,\frac{\varrho}{2\,k}+\nu\right)^2-\frac{1-\nu^2}{k}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8.33).$$

Aus der Theorie der Kugelfunktionen ist aber bekannt, daß die Differentialgleichung

$$L(\delta w)+\lambda\,\delta w=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8.32)$$

nur dann eine auf der ganzen Kugel reguläre Lösung besitzt, wenn der Parameter λ die Bedingung:

$$\lambda=n\,(n+1)-2 \qquad (n \text{ ganzzahlig}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8.34)$$

erfüllt. Die Wurzel $\lambda_1=0$ kommt hier nicht weiter in Betracht. Die kritischen Werte von ϱ, für welche die Grundlösung (8.5) instabil wird, hat man also aus der Gleichung:

$$\frac{1+k}{1-k}\,\frac{\varrho}{2\,k}-1\pm\sqrt{\left(\frac{1+k}{1-k}\,\frac{\varrho}{2\,k}+\nu\right)^2-\frac{1-\nu^2}{k}}=n\,(n+1)-2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8.35)$$

zu bestimmen. Nun ist die rechte Seite von (8.35) reell, ja sogar ganzzahlig. Offenbar muß dann stets die Beziehung:

$$\left(\frac{1+k}{1-k}\,\frac{\varrho}{2\,k}+\nu\right)^2\geqq\frac{1-\nu^2}{k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8.36)$$

gelten. Das Gleichheitszeichen liefert eine untere Schranke für den kleinsten Eigenwert, nämlich:

$$\varrho=2\,\frac{1-k}{1+k}\left(\sqrt{k\,(1-\nu^2)}-\nu\,k\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8.37).$$

Für diesen Wert von ϱ ist die linke Seite von (8.36) von der Größenordnung $\frac{1}{\sqrt{k}}$, also bei kleinem k eine große Zahl, die nur wenig von einer ganzen Zahl abweicht, so daß praktisch die untere Schranke (8.37) gleichzeitig den kleinsten Eigenwert darstellt. Der kleinste kritische Außendruck ist also gegeben durch:

$$\frac{T\,(1-\nu^2)}{E\,h}=2\,\frac{1-k}{1+k}\left(\sqrt{k\,(1-\nu^2)}-\nu\,k\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8.37\,\text{a}),$$

oder bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung:

$$p\sim\frac{2\,E}{\sqrt{3\,(1-\nu^2)}}\,\frac{h^2}{a^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8.38).$$

Wir wollen nun dasselbe Problem noch einmal mit Hilfe des Ansatzes (4.1) für die Formänderungsarbeit behandeln. Es zeigt sich, daß wie beim Kreiszylinder auch hier die Stabilitätsgleichungen komplizierter sind. Es genügt wieder, die $'j^{\varrho}_{\sigma}$ bis zu den Gliedern zweiter Ordnung zu berechnen. Diese sind für die Kugelschale gegeben durch die Ausdrücke:

$$
\left.\begin{aligned}
{}'j^1_1 &= \dot v_1 + v_3 + \frac{1}{2}\left(\dot v_1^2 + v_3^2 + \sin^2 q_1\, \dot v_2^2 + 4\, \dot v_1 v_3 + \dot v_3^2\right)\\
{}'j^1_2 &= \frac{1}{2}\{v_1' + \sin^2 q_1\, \dot v_2 + 2\, v_1' v_3 + 2 \sin^2 q_1\, \dot v_2 v_3\\
&\quad + 2 \sin q_1 \cos q_1\, \dot v_2 v_1 + \dot v_1 v_1' + \sin^2 q_1\, \dot v_2 v_2' + \dot v_3 v_3'\}\\
{}'j^2_1 &= \frac{{}'j^1_2}{\sin^2 q_1}\\
{}'j^2_2 &= v_2' + v_3 + \operatorname{ctg} q_1\, v_1 + \frac{1}{2}\Big[v_2'^2 + \frac{v_1'^2}{\sin^2 q_1} + v_3^2\\
&\quad + \frac{v_3'^2}{\sin^2 q_1} + (\operatorname{ctg}^2 q_1 - 1)\, v_1^2 + 4 \operatorname{ctg} q_1\, v_1 v_3 + 4\, v_2' v_3 + 4 \operatorname{ctg} q_1\, v_2' v_1\Big]
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (8.39).
$$

Die Berechnung der skalaren Produkte ${}'j^\varrho_\sigma\, j^\sigma_\varrho$ und ${}'e\, e$ bis zu den Gliedern dritter Ordnung geschieht nach Gleichung (7.17) und führt zu den Formeln:

$$
\left.\begin{aligned}
{}'j^1_1 j^1_1 &= (\dot v_1 + v_3)^2 - (\dot v_1 + v_3)\left[\dot v_1^2 + v_3^2 + v_1' \dot v_2 - \dot v_3^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{v_1'^2}{\sin^2 q_1} - \sin^2 q_1\, \dot v_2^2\right)\right]\\
{}'j^1_2 j^2_1 &= \frac{1}{4 \sin^2 q_1}(v_1' + \sin^2 q_1\, \dot v_2)^2 - \frac{v_1' + \sin^2 q_1\, \dot v_2}{2 \sin^2 q_1}[v_1' v_2'\\
&\quad + \sin^2 q_1\, \dot v_1 \dot v_2 + (v_1' - \sin^2 q_1\, \dot v_2) \operatorname{ctg} q_1\, v_1 - \dot v_3 v_3']\\
{}'j^2_2 j^2_2 &= (v_2' + v_3 + \operatorname{ctg} q_1\, v_1)^2 - (v_2' + v_3 + \operatorname{ctg} q_1\, v_1)\Big[v_2'^2 + v_3^2 + v_1' \dot v_2\\
&\quad + \frac{v_1^2}{\sin^2 q_1} - \frac{v_3'^2}{\sin^2 q_1} - \frac{1}{2}\left(\frac{v_1'^2}{\sin^2 q_1} - \sin^2 q_1\, \dot v_2^2\right)\Big]\\
{}'e\, e &= (\dot v_1 + v_2' + 2\, v_3 + \operatorname{ctg} q_1\, v_1)^2 - (\dot v_1 + v_2' + 2\, v_3 + \operatorname{ctg} q_1\, v_1)\Big[\dot v_1^2\\
&\quad + v_2'^2 + 2\, v_3^2 + 2\, v_1' \dot v_2 + \frac{v_1^2}{\sin^2 q_1} - \dot v_3^2 - \frac{v_3'^2}{\sin^2 q_1}\Big]
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (8.40).
$$

Der Ausdruck für die Formänderungsarbeit der Kugelschale läßt sich jetzt angeben, da die Krümmungsänderungen bereits berechnet und aus den Gl. (6.11) zu entnehmen sind.

Man erhält:

$$
\left.\begin{aligned}
A &= G\, h \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Big\{(\dot v_1 + v_3)^2 + \frac{1}{2 \sin^2 q_1}(v_1' + \sin^2 q_1\, \dot v_2)^2\\
&\quad + (v_2' + v_3 + \operatorname{ctg} q_1\, v_1)^2 + \frac{1}{m-1}(\dot v_1 + v_2' + 2\, v_3 + \operatorname{ctg} q_1\, v_1)^2\\
&\quad + k\Big[(\ddot v_3 - \dot v_1)^2 + \frac{2}{\sin^2 q_1}\left(\dot v_3' - \operatorname{ctg} q_1\, v_3' - \frac{1}{2}(v_1' + \sin^2 q_1\, \dot v_2)\right)^2\\
&\quad + \left(\frac{v_3''}{\sin^2 q_1} + \operatorname{ctg} q_1\, \dot v_3 - v_2' - \operatorname{ctg} q_1\, v_1\right)^2\\
&\quad + \frac{1}{m-1}\left(\left(\ddot v_3 + \operatorname{ctg} q_1\, \dot v_3 + \frac{v_3''}{\sin^2 q_1}\right) - (\dot v_1 + v_2' + \operatorname{ctg} q_1\, v_1)\right)^2\Big]\\
&\quad - (\dot v_1 + v_3)\left[\dot v_1^2 + v_3^2 + v_1' \dot v_2 - \dot v_3^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{v_1'^2}{\sin^2 q_1} - \sin^2 q_1\, \dot v_2^2\right)\right]\\
&\quad - \frac{v_1' + \sin^2 q_1\, \dot v_2}{\sin^2 q_1}[v_1' v_2' + \sin^2 q_1\, \dot v_1 \dot v_2 + (v_1' - \sin^2 q_1\, \dot v_2) \operatorname{ctg} q_1\, v_1 - \dot v_3 v_3']\\
&\quad - (v_2' + v_3 + \operatorname{ctg} q_1\, v_1)\Big[v_2'^2 + v_3^2 + v_1' \dot v_2 + \frac{v_1^2}{\sin^2 q_1} - \frac{v_3'^2}{\sin^2 q_1}\\
&\quad - \frac{1}{2}\left(\frac{v_1'^2}{\sin^2 q_1} - \sin^2 q_1\, \dot v_2^2\right)\Big] - \frac{1}{m-1}(\dot v_1 + v_2' + 2\, v_3 + \operatorname{ctg} q_1\, v_1)\\
&\quad \left[\dot v_1^2 + v_2'^2 + 2\, v_3^2 + 2\, v_1' \dot v_2 + \frac{v_1^2}{\sin^2 q_1} - \dot v_3^2 - \frac{v_3'^2}{\sin^2 q_1}\right]\Big\}\, a^2 \sin q_1\, \mathrm{d} q_1\, \mathrm{d} q_2
\end{aligned}\right\} \quad (8.40\,a).
$$

Die Berechnung der Arbeit, die der konstante Normaldruck mit den Komponenten $p_i = -p\zeta_i$ bei einer virtuellen Verschiebung leistet, geschieht wie beim Kreiszylinder. Die mit $\sqrt{g}$ multiplizierten Komponenten der Flächennormale erhalten hier die Werte:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{g}\,\zeta_1 &= a^2 (1+v_3)^2 \sin(q_1+v_1)\,[\dot{v}_2 v_3' - \dot{v}_3 (1+v_2')] \\ \sqrt{g}\,\zeta_2 &= a^2 (1+v_3)^2 \sin(q_1+v_1)\,[v_1' \dot{v}_3 - v_3' (1+\dot{v}_1)] \\ \sqrt{g}\,\zeta_3 &= a^2 (1+v_3)^2 \sin(q_1+v_1)\,[(1+\dot{v}_1)(1+v_2') - v_1' \dot{v}_2] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8.41),$$

so daß die virtuelle Arbeit durch die Formel:

$$\left.\begin{aligned} \delta A_p = -a\,p \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} & (1+v_3)^2 \sin(q_1+v_1)\,[\{\dot{v}_2 v_3' - \dot{v}_3 (1+v_2')\}\,\delta v_1 \\ & + \{v_1' \dot{v}_3 - v_3' (1+\dot{v}_1)\}\,\delta v_2 + \{(1+\dot{v}_1)(1+v_2') - v_1' \dot{v}_2\}\,\delta v_3]\, a^2\, \mathrm{d}q_1\, \mathrm{d}q_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (8.42)$$

gegeben ist, die als die erste Variation des Integrals:

$$A_p = -\frac{1}{3}\,a\,p \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (1+v_3)^3 \{(1+\dot{v}_1)(1+v_2') - v_1' \dot{v}_2\}\, a^2 \sin(q_1+v_1)\, \mathrm{d}q_1\, \mathrm{d}q_2 \quad . \quad (8.42\,\mathrm{a})$$

angesehen werden kann, d. h. der Belastung läßt sich ein Potential zuordnen.

Der Grundlösung (8.5) entspricht die auf den ursprünglichen Radius a bezogene Radialverschiebung:

$$v_3^{(0)} = -\frac{a\,p}{2\,D\,(1+\nu)}\left(D = \frac{E\,h}{1-\nu^2}\right); \quad v_1^{(0)} = 0; \quad v_2^{(0)} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (8.43).$$

Die Eulerschen Gleichungen des Variationsproblems

$$A - A_p = \mathrm{Min} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8.43\,\mathrm{a})$$

haben die Grundlösung:

$$v_1^{(0)} = 0; \quad v_2^{(0)} = 0; \quad v_3^{(0)} = \mathrm{const} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8.44).$$

Vernachlässigt man bei der Berechnung der konstanten Radialverschiebung wie beim Kreiszylinder höhere Potenzen von v_3, so erhält die Konstante den Wert:

$$v_3^{(0)} = -\frac{a\,p}{2\,D\,(1+\nu)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8.44\,\mathrm{a}).$$

Wir berechnen nun die zweite Variation der potentiellen Energie $U = A - A_p$, die der Grundlösung (8.44) zugeordnet ist, bezeichnen die Variationen von v_1, v_2, v_3 mit u, v, w und erhalten folgenden Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned} \delta^2 U = G\,h \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \Big\{ & (\dot{u}+w)^2 + \frac{1}{2\sin^2 q_1}(u' + \sin^2 q_1\, \dot{v})^2 \\ & + (v' + w + \mathrm{ctg}\, q_1\, u)^2 + \frac{1}{m-1}(\dot{u} + v' + 2\,w + \mathrm{ctg}\, q_1\, u)^2 \\ & + k\Big[(\ddot{w} - \dot{u})^2 + \frac{2}{\sin^2 q_1}\Big(\dot{w}' - \mathrm{ctg}\, q_1\, w' - \frac{1}{2}\,u' - \frac{1}{2}\sin^2 q_1\, \dot{v}\Big)^2 \\ & + \Big(\frac{w''}{\sin^2 q_1} + \mathrm{ctg}\, q_1\, \dot{w} - v' - \mathrm{ctg}\, q_1\, u\Big)^2 \\ & + \frac{1}{m-1}\Big(\ddot{w} + \mathrm{ctg}\, q_1\, \dot{w} + \frac{w''}{\sin^2 q_1} - \dot{u} - v' - \mathrm{ctg}\, q_1\, u\Big)^2\Big]\Big\}\, a^2 \sin q_1\, \mathrm{d}q_1\, \mathrm{d}q_2 \\ + \frac{a\,p}{4}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \Big\{ & \dot{u}^2 + v'^2 + 2\,u'\,\dot{v} + \frac{u'^2}{\sin^2 q_1} \\ & + 6\,(\dot{u} + v' + \mathrm{ctg}\, q_1\, u)\, w + 10\, w^2 - \dot{w}^2 - \frac{w'^2}{\sin^2 q_1} \\ & + \frac{4}{3}\Big[\dot{u}\, v' - u'\, \dot{v} + (\dot{u} + v')\,\mathrm{ctg}\, q_1\, u - \frac{1}{2}\,u^2\Big]\Big\}\, a^2 \sin q_1\, \mathrm{d}q_1\, \mathrm{d}q_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (8.45).$$

Die der zweiten Variation zugeordneten Jacobischen Differentialgleichungen lauten:

$$
\left.\begin{aligned}
&\text{a)}\ \frac{\partial}{\partial q_1}\Bigl\{\Bigl[\dot u + w + \frac{1}{m-1}(\dot u + v' + 2w + \operatorname{ctg} q_1\, u)\\
&\qquad - k\Bigl\{\ddot w + \dot u + \frac{1}{m-1}\Bigl(\ddot w + \operatorname{ctg} q_1\, \dot w + \frac{w''}{\sin^2 q_1} - \dot u - v' - \operatorname{ctg} q_1\, u\Bigr)\Bigr\}\Bigr]\sin q_1\Bigr\}\\
&\qquad + \sin q_1 \frac{\partial}{\partial q_2}\Bigl\{\frac{1}{2\sin^2 q_1}(u' + \sin^2 q_1\, \dot v) - \frac{k}{\sin^2 q_1}\Bigl(\dot w' - \operatorname{ctg} q_1\, w' - \frac{1}{2} u'\\
&\qquad - \frac{1}{2}\sin^2 q_1\, \dot v\Bigr)\Bigr\} - \Bigl\{v' + w + \operatorname{ctg} q_1\, u + \frac{1}{m-1}(\dot u + v' + 2w + \operatorname{ctg} q_1\, u)\\
&\qquad - k\Bigl[\frac{w''}{\sin^2 q_1} + \operatorname{ctg} q_1\, \dot w - v' - \operatorname{ctg} q_1\, u\\
&\qquad + \frac{1}{m-1}\Bigl(\ddot w + \operatorname{ctg} q_1\, \dot w + \frac{w''}{\sin^2 q_1} - \dot u - v - \operatorname{ctg} q_1\, u\Bigr)\Bigr]\Bigr\}\cos q_1\\
&\qquad + \frac{a p}{4 G h}\Bigl\{\frac{\partial}{\partial q_1}\Bigl[\Bigl(\dot u + 3w + \frac{2}{3} v' + \frac{2}{3}\operatorname{ctg} q_1\, u\Bigr)\sin q_1\Bigr]\\
&\qquad + \sin q_1 \frac{\partial}{\partial q_2}\Bigl(\dot v - \frac{2}{3}\dot v\Bigr) - \Bigl[\frac{u}{\sin^2 q_1} + 3\operatorname{ctg} q_1\, w\\
&\qquad + \frac{2}{3}(\dot u + v')\operatorname{ctg} q_1\, u - u\Bigr\}\Bigr]\sin q_1\Bigr\} = 0\\
&\text{b)}\ \frac{\partial}{\partial q_1}\Bigl\{\Bigl[\frac{1}{2}(u' + \sin^2 q_1\, \dot v) - k\Bigl(\dot w' - \operatorname{ctg} q_1\, w' - \frac{1}{2} u' - \frac{1}{2}\sin^2 q_1\, \dot v\Bigr)\Bigr]\sin q_1\Bigr\}\\
&\qquad + \sin q_1 \frac{\partial}{\partial q_2}\Bigl\{v' + w + \operatorname{ctg} q_1\, u + \frac{1}{m-1}(\dot u + v' + 2w + \operatorname{ctg} q_1\, u)\\
&\qquad - k\Bigl[\frac{w''}{\sin^2 q_1} + \operatorname{ctg} q_1\, \dot w - v' - \operatorname{ctg} q_1\, u\\
&\qquad + \frac{1}{m-1}\Bigl(\ddot w + \operatorname{ctg} q_1\, \dot w + \frac{w''}{\sin^2 q_1} - \dot u - v' - \operatorname{ctg} q_1\, u\Bigr)\Bigr]\Bigr\}\\
&\qquad + \frac{a p}{4 G h}\Bigl\{\frac{\partial}{\partial q_1}\Bigl[\Bigl(u' - \frac{2}{3} u'\Bigr)\sin q_1\Bigr] + \sin q_1 \frac{\partial}{\partial q_2}\Bigl[v' + 3w\\
&\qquad + \frac{2}{3}\Bigl(\dot u + \operatorname{ctg} q_1\, u\Bigr)\Bigr]\Bigr\} = 0\\
&\text{c)}\ k\Bigl[\frac{\partial^2}{\partial q_1^2}\Bigl\{\Bigl[\ddot w - \dot u + \frac{1}{m-1}\Bigl(\ddot w + \operatorname{ctg} q_1\, \dot w + \frac{w''}{\sin^2 q_1} - \dot u - v' - \operatorname{ctg} q_1\, u\Bigr)\Bigr]\sin q_1\Bigr\}\\
&\qquad + 2\frac{\partial^2}{\partial q_1\, \partial q_2}\Bigl\{\frac{1}{\sin q_1}\Bigl(\dot w' - \operatorname{ctg} q_1\, w' - \frac{1}{2} u' - \frac{1}{2}\sin^2 q_1\, \dot v\Bigr)\Bigr\}\\
&\qquad + \frac{1}{\sin q_1}\frac{\partial^2}{\partial q_2^2}\Bigl\{\frac{w''}{\sin^2 q_1} + \operatorname{ctg} q_1\, \dot w - v' - \operatorname{ctg} q_1\, u\\
&\qquad + \frac{1}{m-1}\Bigl(\ddot w + \operatorname{ctg} q_1\, \dot w + \frac{w''}{\sin^2 q_1} - (\dot u + v' + \operatorname{ctg} q_1\, u)\Bigr)\Bigr\}\\
&\qquad - \frac{\partial}{\partial q_1}\Bigl\{\Bigl[\frac{w''}{\sin^2 q_1} + \operatorname{ctg} q_1\, \dot w - v' - \operatorname{ctg} q_1\, u\\
&\qquad + \frac{1}{m-1}\Bigl(\ddot w + \operatorname{ctg} q_1\, \dot w + \frac{w''}{\sin^2 q_1} - \dot u - v' - \operatorname{ctg} q_1\, u\Bigr)\Bigr]\cos q_1\Bigr\}\\
&\qquad + \frac{2\cos q_1}{\sin^2 q_1}\frac{\partial}{\partial q_2}\Bigl\{\dot w' - \operatorname{ctg} q_1\, w' - \frac{1}{2} u' - \frac{1}{2}\sin^2 q_1\, \dot v\Bigr\}\Bigr]\\
&\qquad + \Bigl[\dot u + 2w + v' + \operatorname{ctg} q_1\, u + \frac{2}{m-1}(\dot u + v' + 2w + \operatorname{ctg} q_1\, u)\Bigr]\sin q_1\\
&\qquad + \frac{a p}{4 G h}\Bigl\{\ddot w + \operatorname{ctg} q_1\, \dot w + \frac{w''}{\sin^2 q_1} + 10w + 3(\dot u + v' + \operatorname{ctg} q_1\, u)\Bigr\}\sin q_1 = 0
\end{aligned}\right\}\quad (8.46).
$$

Die Gl. (8.46) sind in der vorstehenden Form noch recht unübersichtlich. Unter Einführung der Größen e, ω und des Operators L formen wir sie so um, daß sie möglichst den Gl. (8.13) und (8.16) entsprechen. Man erhält dann das System:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{a)}\ \frac{\partial}{\partial q_1}\{(1+k)(e+2w)-k\,L(w)+\varrho\,(e+3w)\}\\
&\qquad-(1+k)(1-\nu)\left\{\frac{\omega}{\sin q_1}+w-u\right\}=0\\
&\text{b)}\ \frac{\partial}{\partial q_2}\{(1+k)(e+2w)-k\,L(w)+\varrho\,(e+3w)\}\\
&\qquad+(1+k)(1-\nu)\{\omega\sin q_1+\sin^2 q_1\,v-w\}=0\\
&\text{c)}\ k\{L^2(w)-L(e+2w)-(1+\nu)\,L(w)\}+(1+\nu)(1+k)(e+2w)\\
&\qquad+\varrho\{L(w)+8w+3e\}=0
\end{aligned}\right\}\quad . . . (8.47).$$

Die Grundlösung geht in diese Gleichungen etwas komplizierter ein als in die entsprechenden Gleichungen vorher. Insbesondere erscheint sie auch in den ersten beiden Gleichungen, aber in so einfacher symmetrischer Form, daß auch hier die Gl. (8.19) gilt, wie man sich sofort überzeugt. Die Gleichung, die der Formel (8.17) entspricht, lautet nun:

$$\left.\begin{aligned}
&(1+k)\{L(e+2w)-(1-\nu)\,L(w)-(1+\nu)(e+2w)\}\\
&\qquad-k\{L^2(w)-2\,L(w)\}+\varrho\{L(e+3w)-2(e+3w)\}=0
\end{aligned}\right\}\quad . . . . (8.48).$$

Aus (8.48) und (8.47c) folgt durch Addition die Gleichung:

$$L(e+2w)-(1-\nu)\,L(w)+\varrho\{2\,L(w)+L(e+2w)+(e+2w)\}=0 \quad . . . (8.49).$$

Diese Gleichung kann wie (8.29) dazu dienen, $(e+2w)$ aus einer der Gl. (8.48) oder (8.47c) zu eliminieren, denn in ihr ist zumindest $\varrho\,(e+2w)$ zu vernachlässigen. Die weiteren Überlegungen gehen denen der ersten Stabilitätsuntersuchung parallel. Die in Frage kommenden Wurzeln der kubischen Gleichung erhalten die Werte:

$$\lambda_{2,3}=\frac{1+k(3-\nu)}{2k}\varrho-1\pm\sqrt{\left(\frac{1+k(3-\nu)}{2k}\varrho+\nu\right)^2-\frac{1-\nu^2}{k}-\frac{\varrho}{k}(1-\nu)(3-\nu)} \quad . . (8.50).$$

Die Unterschiede gegenüber den früheren Werten sind bedeutungslos, da $k\,(3-\nu)$ gegenüber 1, und auch noch $\frac{\varrho}{k}(1-\nu)(3-\nu)$ gegenüber $\frac{(1-\nu^2)}{k}$ vernachlässigt werden kann.

416

KLEINE MITTEILUNGEN

Ergänzende Bemerkung zu der Arbeit von D. Küchemann: **„Störungsbewegungen in einer Gasströmung mit Grenzschicht“.** Die Methode der kleinen Schwingungen hat bei der Untersuchung der Stabilität laminarer Grenzschichten wertvolle Ergebnisse gezeitigt, welche im Hinblick auf das Problem des laminar-turbulenten Umschlags die Frage der Turbulenzentstehung durch kleine Störungen bis zu einem gewissen Grade geklärt haben. Erstmalig hat nun D. Küchemann (1938) die Frage nach dem Einfluß der Kompressibilität einer Gasströmung auf die Stabilität der laminaren Reibungsschicht in Angriff genommen [1] [1]). Aus Gründen der rechnerischen Einfachheit legte er seinen Untersuchungen nach dem Vorgang von Lord Rayleigh [2] ein aus zwei Geradenstücken zusammengesetztes Geschwindigkeitsprofil (siehe Bild 1) zugrunde. (Das mag nach den Erfahrungen auf Grund der bisherigen Stabilitätsrechnungen bei inkompressiblen Grenzschichten bedenklich stimmen, da sich die richtige Berücksichtigung der Krümmung des wirklichen Profils für das Resultat der Rechnung als sehr wesentlich erwiesen hat. Allein, man kann sich

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Schrifttumverzeichnis am Schluß der Arbeit.

Bild 1. Geschwindigkeitsprofil der Grundströmung.

auf den Standpunkt stellen, daß in der Küchemannschen Arbeit als erster orientierender Schritt ein Vergleich des Stabilitätsverhaltens irgendeines — mathematisch möglichst einfach zu behandelnden — Geschwindigkeitsprofils mit und ohne Berücksichtigung der Kompressibilität vollzogen werden soll, und daß es daher für diese Rechnung gleichgültig sein darf, ob das Profil ein wirklich vorkommendes Grenzschichtprofil so gut

approximiert, daß die Resultate auf dieses anwendbar sind, oder nicht.) Für die Störungsrechnung wurde die Reibung vernachlässigt. Aber selbst bei diesem so vereinfachten mathematischen Modell setzte die rechnerische Kompliziertheit der Entwicklungen den Untersuchungen vorläufig enge Grenzen. Küchemann beschränkte sich auf die Bestimmung der möglichen indifferenten Schwingungen. Die besonders interessierende Frage nach der Berechnung oder auch nur nach der Existenz angefachter Störungen blieb offen. Man weiß, daß die inkompressible Strömung mit demselben Geschwindigkeitsprofil stabil ist.

Es soll nun im folgenden lediglich auf eine Konsequenz hingewiesen werden, die man bei Hinnahme der Küchemannschen Vereinfachungen und Vernachlässigungen aus seinen Ergebnissen fast unmittelbar folgern kann: Aus den nachgewiesenen indifferenten Schwingungen lassen sich durch einen Grenzübergang gewisse angefachte Wellen herleiten, die zwar nicht zu der Klasse der von Küchemann angesetzten Partialstörungen gehören, aber als Lösungen eines allgemeiner angesetzten Störungsproblems ein lineares Anwachsen der Schwingungsamplituden mit der Zeit aufweisen[2]). Inwieweit diese Lösungen physikalisches Interesse besitzen, muß vorläufig dahingestellt bleiben. Die folgende Herleitung derselben ist so abgefaßt, daß ein gewisses Bedenken in dieser Hinsicht sich aufdrängt. Ich komme an gegebener Stelle darauf zurück. Da dieser Lösungstypus auch bei der Untersuchung anderer Geschwindigkeitsprofile auftreten wird, vielleicht jedoch ohne so deutlich sein Wesen zu offenbaren wie in der hier gegebenen Herleitung, dürfte die folgende Mitteilung erwünscht sein.

Wir legen unseren Betrachtungen einen gegenüber dem Küchemannschen Ansatz fortschreitender Störungswellen allgemeineren Störungsansatz, in welchem die Gestalt der Zeitabhängigkeit dieser Störungen noch offen gelassen wird, zugrunde. Im übrigen stimmen die im folgenden gemachten vereinfachenden Voraussetzungen mit jenen der Küchemannschen Theorie überein.

Die laminare ebene Grundströmung besitze die Geschwindigkeit U, welche parallel zur x-Achse gerichtet sein und, wie bei allen Störungsrechnungen, von denen einleitend die Rede war, aus Gründen der rechnerischen Durchführbarkeit allein von der dazu senkrechten y-Koordinate abhängen möge. Dieser Grundströmung werde eine kleine Störung überlagert derart, daß die Gesamtströmung durch ihre Geschwindigkeitskomponenten u und v in x- bzw. y-Richtung und ihre Dichte ϱ in folgender Gestalt gegeben sei:

$$\left.\begin{aligned} u(x,y,t) &= U(y) + \bar{u}(y,t)\, e^{i\alpha x} \\ v(x,y,t) &= \bar{v}(y,t)\, e^{i\alpha x} \\ \varrho(x,y,t) &= \varrho_0 \{1 + \bar{\varrho}(y,t)\, e^{i\alpha x}\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (1).$$

Dabei bezeichnet ϱ_0 die als konstant angenommene Dichte der ungestörten Grundströmung. Mit reellem $\alpha = 2\pi/\lambda$ bedeutet λ die Wellenlänge der angesetzten Partialstörung.

Die Eulerschen Gleichungen, in welchen der Druck p durch die als konstant angenommene Schallgeschwindigkeit a vermöge $a^2 = \mathrm{d}p/\mathrm{d}\varrho$ ersetzt wurde:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{a^2}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{a^2}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

[2]) Diese Bemerkung entstammt einigen Rechnungen, die ich im Herbst 1937 auf Anregung von Herrn W. Tollmien durchführte.

und die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + u\frac{\partial \varrho}{\partial x} + v\frac{\partial \varrho}{\partial y} = -\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad . \quad . \quad (3)$$

liefern, wenn wir nur die in $\bar{u}$, $\bar{v}$ und $\bar{\varrho}$ und deren Ableitungen nach y und t linearen Glieder berücksichtigen, das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + i\alpha U\bar{u} + U'\bar{v} &= -i\alpha a^2 \bar{\varrho} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + i\alpha U\bar{v} &= -a^2\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial t} + i\alpha U\bar{\varrho} &= -i\alpha\bar{u} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (4).$$

Hieraus gewinnen wir durch Elimination von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ die folgende Störungsgleichung für $\bar{\varrho}$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^3 \bar{\varrho}}{\partial t^3} - a^2\frac{\partial^3 \varrho}{\partial y^2\,\partial t} + 3i\alpha U\frac{\partial^2 \bar{\varrho}}{\partial t^2} - i\alpha a^2 U\frac{\partial^2 \bar{\varrho}}{\partial y^2} \\ &\quad + \alpha^2(a^2 - 3U^2)\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial t} + 2i\alpha a^2 U'\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial y} \\ &\quad + i\alpha^3(a^2 - U^2)U\bar{\varrho} = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad (5).$$

Für die von D. Küchemann angesetzte Störung in Gestalt einer in x-Richtung wandernden ebenen Welle ist insbesondere

$$\left.\begin{aligned} u(y,t) &= u^*(y)\, e^{-i\beta t} \\ \bar{v}(y,t) &= v^*(y)\, e^{-i\beta t} \\ \bar{\varrho}(y,t) &= \varrho^*(y)\, e^{-i\beta t} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Mit diesem Ansatz geht unsere allgemeine Störungsgleichung (5) in die von Küchemann angegebene gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung für $\varrho^*(y)$ über, in der $\beta/\alpha = c$ gesetzt ist:

$$\varrho^{*\prime\prime} - \frac{2U'}{U-c}\varrho^{*\prime} + \alpha^2\left\{\frac{(U-c)^2}{a^2} - 1\right\}\varrho^* = 0 \quad . \quad (7).$$

Der Realteil β_r des Parameters β bedeutet die Kreisfrequenz der Störung, β_i das logarithmische Inkrement derselben. β_i ist für angefachte Schwingungen positiv, für gedämpfte negativ. Der Realteil c_r von c liefert die Phasengeschwindigkeit, mit der sich die Welle in x-Richtung fortpflanzt. Für den in (7) auftretenden Differentialoperator führen wir die Kurzbezeichnung D ein:

$$D \equiv \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} - \frac{2U'}{U-c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} + \alpha^2\left\{\frac{(U-c)^2}{a^2} - 1\right\} \quad . \quad (8).$$

Das von D. Küchemann zugrundegelegte Geschwindigkeitsprofil hat folgende Gestalt (siehe Bild 1):

$$U(y) = \begin{cases} \gamma y & \text{für } 0 \leq y \leq b \\ U_0 = \gamma b & \text{für } y \geq b \end{cases} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

($\gamma = \text{const}$). Nach Einführung der neuen dimensionslosen unabhängigen Veränderlichen $\zeta = y/b - c/U_0$ und der Machschen Zahl $M = U_0/a$ geht der Operator D (nach Multiplikation mit b^2) in den speziellen Ausdruck

$$D_i \equiv \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\zeta^2} - \frac{2}{\zeta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta} + (\alpha b)^2\{M^2\zeta^2 - 1\} \quad . \quad (10\mathrm{i})$$

innerhalb der Grenzschicht und

$$D_a \equiv \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\zeta^2} + (\alpha b)^2\left\{M^2\left(1 - \frac{c}{U_0}\right)^2 - 1\right\} \quad . \quad (10\mathrm{a})$$

außerhalb der Grenzschicht über.

Die Randbedingungen des Problems ergeben sich aus den Forderungen, daß

1. $v = 0$ an der Wand $y = 0$,
2. ϱ am Profilknick $y = b$ stetig und
3. auch v in $y = b$ stetig

ist.

Stellen ϱ_1 und ϱ_2 ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $D_i \varrho^* = 0$ dar, so lautet die allgemeine Lösung in der inneren Schicht:

$$\varrho^* = A_1 \varrho_1 + A_2 \varrho_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (11).$$

Die Stelle $\zeta = 0$ (die jenem kritischen Wandabstand y entspricht, in welchem die Phasengeschwindigkeit der Wellen mit der Grundströmungsgeschwindigkeit übereinstimmt) erweist sich als Nebenpunkt, die Lösungen verhalten sich also in der ganzen Grenzschicht regulär. Dasselbe gilt für die Geschwindigkeitskomponenten [1] S. 209 bis 210.

Außerhalb der Grenzschicht ergibt sich aus $D_a \varrho^* = 0$:

$$\varrho^* = B_1 e^{-L\zeta} + B_2 e^{L\zeta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

mit

$$L = a\, b \left\{1 - M^2 \left(1 - \frac{c}{U_0}\right)^2\right\}^{1/2} \quad . \; . \; . \quad (13).$$

Verschwindet der Realteil L_r von L, so führen die Randbedingungen auf drei Gleichungen für die vier Integrationskonstanten A_1, A_2, B_1, B_2 und physikalisch ergeben sich Störungen beliebig vorgebbarer Wellenlänge und Phasengeschwindigkeit. Es handelt sich um von außen kommende Störungen. Das eigentliche Stabilitätsproblem ergibt sich für $L_r \neq 0$. Es werde dann ohne Einschränkung der Allgemeinheit $L_r > 0$ angenommen. Dann muß notwendig $B_2 = 0$ sein und man erhält Störungen in Wandnähe. Für die verbleibenden 3 Konstanten A_1, A_2, $B_1 = B$ liefern die Randbedingungen das homogene Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{ll} A_1 \varrho_1' + A_2 \varrho_2' = 0 & \\ \text{für} \quad \zeta = \zeta_w = - c/U_0 \text{ (Wand)} & \\ \left.\begin{array}{l} A_1 \varrho_1 + A_2 \varrho_2 = B\, e^{-L\zeta} \\ \text{für} \quad \zeta = \zeta_k = 1 - c/U_0 \\ A_1 \varrho_1' + A_2 \varrho_2' = - L\, B\, e^{-L\zeta} \\ \text{für} \quad \zeta = \zeta_k = 1 - c/U_0 \end{array}\right\} & \text{(Grenz-schicht-rand)} \end{array}\right\} \quad (14)$$

und die Lösbarkeitsbedingung ergibt zu jedem festen U_0 Eigenwertkurven $\alpha = \alpha(\beta)$. Die Natur und der Gültigkeitsbereich der von Küchemann hergestellten Lösungen setzte dem Versuch der Berechnung komplexer Eigenwerte β sehr große Schwierigkeiten entgegen, so daß Küchemann sich im weiteren Verlauf seiner Rechnungen auf die Bestimmung der möglichen indifferenten Schwingungen ($\beta_i = 0$) beschränkte.

Für die reellen Eigenwerte ergeben sich die in Bild 2 wiedergegebenen Kurven. Ich habe dabei auf Grund des mir von Herrn Küchemann zur Verfügung gestellten Zahlenmaterials eine andere Darstellungsweise gewählt als in der Küchemannschen Veröffentlichung. Der Grenzfall $M = 0$ zeigt den guten Anschluß an die von O. Tietjens für das Geschwindigkeitsprofil (9) berechnete Eigenwertkurve des Falles der volumbeständigen Strömung, in welchem sich Stabilität herausgestellt hatte [3] [3]).

Als wesentlich neues Merkmal im Verlauf der Kurven für $M > 0$ gegenüber der Tietjensschen Eigenwertkurve des inkompressiblen Falles zeigt sich ein Umbiegen derselben nach Erreichen eines maximalen α-Wertes (minimale Wellenlänge λ) und Rückkehr zum Ursprung. Zwar gestatten die

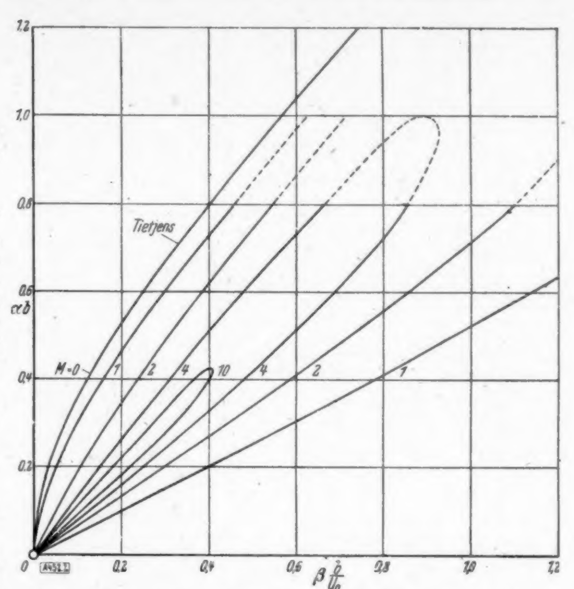


Bild 2. Eigenwertkurven der indifferenten Schwingungen für verschiedene Machsche Zahlen.

Küchemannschen Lösungen der Störungsgleichung nicht, die Eigenwertkurven für die praktisch in Frage kommenden Machschen Zahlen M in den Bereich größerer α-Werte zu verfolgen — es gibt dort auch weitere Äste der Eigenwertkurven —, jedoch wird die eben hervorgehobene Eigentümlichkeit der Kurven sichergestellt durch die mittels asymptotischer Lösungen für große Machsche Zahlen berechenbaren Eigenwertkurven, von denen allein aus diesen grundsätzlichen Erwägungen heraus jene für die große Machsche Zahl $M = 10$ berechnet wurde [4]).

Gerade das Vorhandensein dieser Maxima der obigen Eigenwertkurven $\alpha = \alpha(\beta)$ — nennen wir sie $\alpha = \alpha_0$ — gibt uns nun die Möglichkeit, aus den zugehörigen indifferenten Lösungen angefachte Lösungen mathematisch zu konstruieren. Während für eine zu einem vorgegebenen M-Wert gehörige Eigenwertkurve zu jedem $\alpha < \alpha_0$ zwei Kreisfrequenzen β, also zwei indifferente Wellen möglich sind, rücken diese für $\alpha \rightarrow \alpha_0$ zusammen. Überlagert man für $\alpha < \alpha_0$ zunächst die beiden möglichen indifferenten Wellen:

$$\bar{\varrho}(y, t)\, e^{i\alpha x} = A\, \varrho^*(y; \beta_1)\, e^{i(\alpha x - \beta_1 t)} + B\, \varrho^*(y; \beta_2)\, e^{i(\alpha x - \beta_2 t)}$$

und wählt man $B = -A$, so ist

$$\bar{\varrho}(y, t)\, e^{i\alpha x} = A\, \{\varrho^*(y; \beta_1) - \varrho^*(y; \beta_2)\}\, e^{i(\alpha x - \beta_1 t)} - A\, \varrho^*(y; \beta_2)\, \{e^{i(\alpha x - \beta_2 t)} - e^{i(\alpha x - \beta_1 t)}\}.$$

Geht man nun zur Grenze $\alpha \rightarrow \alpha_0$, also auch $\beta_1 - \beta_2 \rightarrow 0$ (β_1, $\beta_2 \rightarrow \beta_0$) über und hält man dabei $A\,(\beta_1 - \beta_2) = \sigma$ als von Null verschiedene endliche Zahl fest [5]), so wird in der Grenze

$$\bar{\varrho}(y, t)\, e^{i\alpha x} = \sigma \left\{\frac{d\varrho^*}{d\beta} - i\, t\, \varrho^*\right\} e^{i(\alpha x - \beta t)}\Big|_{\beta = \beta_0}.$$

[3]) Die Gleichung der Eigenwertkurve lautet dort:

$$\frac{\beta b}{U_0} = \alpha b - \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2\alpha b}\right).$$

[4]) Eine Neuberechnung unsererseits ergab kleine, hier unwesentliche Abweichungen gegenüber der von Küchemann angegebenen Kurve.

[5]) Diese Annahme: $\sigma = \text{const}$ für den Grenzübergang ist physikalisch nicht evident. Es läge näher, statt σ die Größe $|A|$ als konstant anzusehen. (Anders liegen natürlich die Verhältnisse bei erzwungenen Schwingungen, denen dauernd Energie zugeführt wird.) Auf diese Stelle der Rechnung bezieht sich die einleitend gemachte Bemerkung zur physikalischen Deutbarkeit der Lösung.

Dabei sind also β_0 und $\alpha_0 = \alpha(\beta_0)$ die Parameterwerte des Extremums der Eigenwertkurve $\alpha = \alpha(\beta)$ der indifferenten Eigenschwingung (deren Amplitude $\varrho^*(y;\alpha_0,\beta_0)$ ist) bei der betreffenden Machschen Zahl M, und es bezeichnet σ eine Konstante mit der Dimension (Zeit)$^{-1}$.

Da der vollzogene Grenzprozeß legitim ist — er setzt die Kenntnis der Tatsache voraus, daß $\frac{\mathrm{d}\,c(\beta)}{\mathrm{d}\,\beta}$ existiert, stetig ist und in $\beta = \beta_0$ verschwindet, — stellt (15) eine Lösung des Störungsproblems von dem angekündigten Anfachungscharakter dar.

Man kann diese Lösung selbsverständlich auch direkt durch den Versuchsansatz

$$\bar{\varrho}(y,t) = \sigma\{R_1(y) - i\,t\,R_2(y)\}\,e^{-i\beta t} \quad . \quad . \quad (16)$$

einer linear mit der Zeit angefachten Welle gewinnen. (Der Faktor $-i$ bei R_2 ist hier nur aus Zweckmäßigkeitsgründen gewählt.) Geht man nämlich mit diesem Ansatz in die allgemeine Störungsgleichung (5) ein, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} &D\,R_1 - \frac{R_1''}{\alpha(U-c)} \\ &\quad -\alpha\left\{\frac{3(U-c)}{a^2} - \frac{1}{U-c}\right\}R_2 = i\,t\,D R_2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (17),$$

wo D der Operator (8) ist. Da diese Beziehung identisch in t gelten soll, müssen linke und rechte Seite für sich verschwinden. Es ist also einmal $D\,R_2 = 0$ und mit Rücksicht auf die Randbedingungen muß also

$$R_2 = \varrho^*(y;\alpha,\beta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

sein. Damit sind auch bereits die möglichen Parameterwerte α, β auf jene der Eigenwertkurve $\alpha = \alpha(\beta)$ von ϱ^* beschränkt. Die inhomogene Differentialgleichung für R_1 (nullgesetzte linke Seite von (17)) hat, wie man dann leicht bestätigt, die Lösung $R_1 = \frac{\mathrm{d}\,\varrho^*}{\mathrm{d}\,\beta} + k\,\varrho^*$, wo k eine Konstante bezeichnet [6]). Die additive indifferente Eigenlösung mit der Amplitude $k\,\varrho^*$ bleibt natürlich frei, da sie stets jeder Lösung der linearen Differentialgleichung (5) überlagert werden kann, und wir können ohne Einschränkung für unsere Betrachtungen $k = 0$ setzen. Die Randbedingungen, die man für R_1 direkt auf Grund der oben im Text angegebenen drei Forderungen an ϱ und v in $\zeta = \zeta_W$ bzw. in $\zeta = \zeta_K$ herleitet, stimmen mit den Ausdrücken, die man durch totale Ableitung der Bedingungen (14) nach β erhält [7]), dann überein, wenn $\frac{\mathrm{d}\,\alpha}{\mathrm{d}\,\beta} = 0$ ist, und man gelangt damit gerade zu der Lösung (15) für die Parameterwerte $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$.

Es ist nur noch die Regularität der Lösung zu prüfen. Innerhalb der Grenzschicht ist, da ja nach der ersten Bedingung (11) $\varrho^*(\zeta;\alpha,\beta)$ bis auf einen freibleibenden Normierungsfaktor in der Form

$$\varrho^* = \varrho_1'(\zeta_W)\,\varrho_2(\zeta) - \varrho_2'(\zeta_W)\,\varrho_1(\zeta) \quad . \quad . \quad (19)$$

geschrieben werden kann und dabei

$$\varrho_1 = \zeta^3 \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{2\nu}\,\zeta^{2\nu}, \qquad \varrho_2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{2\nu}\,\zeta^{2\nu} \qquad (20)$$

([1], Gleichung (13); dort sind auch die Rekursionsformeln für die Entwicklungskoeffizienten angegeben) ist,

$$\left.\begin{aligned} R_1 = \frac{\mathrm{d}\,\varrho^*}{\mathrm{d}\,\beta}\bigg|_{\beta=\beta_0} &= -\frac{1}{\alpha_0 U_0}\Big\{\varrho^{*\prime}(\zeta) \\ &+ \varrho_1''(\zeta_W)\,\varrho_2(\zeta) - \varrho_2''(\zeta_W)\,\varrho_1(\zeta)\Big\}\bigg|_{\beta=\beta_0} \end{aligned}\right\} \quad (21).$$

Dabei ist die Tatsache benutzt worden, daß

$$\frac{\mathrm{d}\,\zeta}{\mathrm{d}\,\beta}\bigg|_{\beta=\beta_0} = \frac{\mathrm{d}\,\zeta_W}{\mathrm{d}\,\beta}\bigg|_{\beta=\beta_0} = -\frac{1}{\alpha_0 U_0} \text{ wegen } \frac{\mathrm{d}\,\alpha}{\mathrm{d}\,\beta}\bigg|_{\beta=\beta_0} = 0$$

ist und ferner, daß nur $\zeta = y/b - \beta/\alpha U_0$ und $\zeta_W = -\beta/\alpha U_0$ in (19) von β abhängen. Außerhalb der Grenzschicht wird entsprechend, wegen

$$\frac{\mathrm{d}\,L}{\mathrm{d}\,\beta}\bigg|_{\beta=\beta_0} = -\frac{\alpha b^2 M^2}{U_0 L}\left(1 - \frac{c}{U_0}\right)\bigg|_{\beta=\beta_0}$$

$$R_1 = \left\{-\frac{\alpha b^2 M^2}{U_0 L}\left(1 - \frac{c}{U_0}\right)B\,\zeta\,e^{-L\zeta} + C\,e^{-L\zeta}\right\}\bigg|_{\beta=\beta_0} \quad (22),$$

wo sich C aus den Randbedingungen bestimmt bzw. mit der Kenntnis, daß $R_1 = \frac{\mathrm{d}\,\varrho^*}{\mathrm{d}\,\beta}\Big|_{\beta=\beta_0}$ ist, sogleich zu $C = \left[\frac{\mathrm{d}\,B}{\mathrm{d}\,\beta} + \frac{B\,L}{\alpha U_0}\right]_{\beta=\beta_0}$ berechnet [8]). Es ist somit R_1 und also auch $\bar{\varrho}(y,t)$ innerhalb und außerhalb der Grenzschicht in y regulär (und am Knick $\zeta = \zeta_K$ auf Grund der Randbedingungen stetig und stetig differenzierbar).

Für die Geschwindigkeiten ist entsprechend (15) anzusetzen:

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}(y,t) &= \sigma\{F(y) - i\,t\,u^*(y)\}\,e^{-i\beta t} \\ \bar{v}(y,t) &= \sigma\{G(y) - i\,t\,v^*(y)\}\,e^{-i\beta t} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (23).$$

Wenn man zur Auffindung der Lösung zunächst versuchsweise den allgemeinen Ansatz (16), wie dies oben geschildert wurde, macht, braucht man für die Randbedingungen, die an R_1 zu stellen sind, die Kenntnis von $\bar{v}$, also von $G(y)$, denn es soll ja v an der Wand verschwinden und im Profilknick stetig sein. Nun gilt ([1], Gl. (6)) allgemein

$$v^*(y) = \frac{i\,a^2}{\alpha(U-c)}\,\varrho^{*\prime}(y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Damit errechnet man $G(y)$ unter Berücksichtigung der zweiten Gl. (4) zu

$$G(y) = \frac{1}{\alpha(U-c)}\{v^*(y) + i\,a^2 R_1'(y)\} \qquad (25).$$

(Außerhalb der Grenzschicht ist insbesondere $U \equiv U_0$ zu setzen.) Es wäre demnach von R_1 zu fordern: 1) $R_1' = 0$ an der Wand, 2) und 3) R_1 und R'_1 stetig am Profilknick. Dies aber nur nebenbei.

Hier interessiert uns nur die Frage der Regularität der zur Lösung (15) gehörigen Geschwindigkeitskomponenten. Es ist dabei nur die kritische Stelle $\zeta = 0$ besonders zu prüfen. Bei Berücksichtigung von (9), (19), (21) ist

$$\left.\begin{aligned} G(\zeta) = \frac{i\,a^2}{\alpha\,b\,U_0\,\zeta}\Big\{&-\frac{\varrho^{*\prime\prime}(\zeta)}{\alpha U_0} + \frac{\varrho^{*\prime}(\zeta)}{\alpha U_0 \zeta} \\ &+ \varrho_2''(\zeta_W)\,\varrho_1'(\zeta) - \varrho_1''(\zeta_W)\,\varrho_2'(\zeta)\Big\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (26).$$

---

[6]) Die allgemeine Lösung lautet $R_1 = \frac{\mathrm{d}\,\varrho^*}{\mathrm{d}\,\beta} + C_1\,\varrho_1 + C_2\,\varrho_2$, aber da man $R_1'(\zeta_W) = 0$ zu fordern hat (siehe unten), ist wegen $\frac{\mathrm{d}\,\varrho^{*\prime}}{\mathrm{d}\,\beta}(\zeta_W) = 0$ zu verlangen, daß $C_1\,\varrho_1'(\zeta_W) + C_2\,\varrho_2'(\zeta_W) = 0$, also $C_1 : C_2 = A_1 : A_2$ nach der ersten Gl. (11) ist.

[7]) Das darf man ja, da diese Beziehungen gerade längs $\alpha = \alpha(\beta)$ identisch in β erfüllt sind.

[8]) $\frac{\mathrm{d}\,B}{\mathrm{d}\,\beta}$ läßt sich demnach, nebenbei bemerkt, direkt aus den Randbedingungen für R_1 in $\zeta = \zeta_K$ berechnen.

Setzt man in (19) die Potenzentwicklungen (20) ein, um sie dann in (26) einzuführen, so heben sich hier gerade die negativen Potenzen von ζ heraus, denn nach steigenden Potenzen angeordnet ist

$$\frac{\varrho^{*\prime}}{\zeta^2} = \frac{2\,\varrho_1'(\zeta_W)\,b_2}{\zeta} + \cdots\cdots,$$

$$-\frac{\varrho^{*\prime\prime}}{\zeta} = -\frac{2\,\varrho_1'(\zeta_W)\,b_2}{\zeta} + \cdots\cdots.$$

Damit ist $G(\zeta)$ und also auch $\bar{v}(y,t)$ in $\zeta = 0$ regulär. Aus der dritten Gl. (4) folgt dann unmittelbar auch die Regularität von $\bar{u}(y,t)$.

Es ist somit die angefachte Störung (15) eine Lösung des Störungsproblems, die allen aus physikalischen Gründen zu stellenden Regularitätsbedingungen genügt.

Schrifttumverzeichnis.

[1] D. Küchemann: Störungsbewegungen in einer Gasströmung mit Grenzschicht. Z. angew. Math. Mech. Bd. 18 (1938), S. 207—222.

[2] Lord Rayleigh: On the stability or instability of certain fluid motions. Papers 3, 17.

[3] O. Tietjens: Beiträge zur Entstehung der Turbulenz. Z. angew. Math. Mech. Bd. 5 (1925), S. 200—217.

Göttingen. H. Görtler. 452

BUCHBESPRECHUNGEN

Dozent Dr.-Ing. habil. **ERNST ECKERT**, Die Berechnung des Wärmeübergangs in der laminaren Grenzschicht umströmter Körper. (VDI-Forschungsheft 416, Beilage zu „Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens", Ausgabe B, Bd. 13, Sept./Okt. 1942.) 24 S. m. 29 Bildern, 3 Arbeitsblättern und 12 Zahlentaf. Berlin 1942, VDI-Verlag G. m. b. H. Preis brosch. 5 M.

Da bei Wärmetauschern vielfach laminare Grenzschichten auftreten, stellt ihre theoretische Behandlung ein technisch wichtiges Problem dar. Für nicht zu große Strömungsgeschwindigkeiten und Temperaturunterschiede kann man dabei Dichte, Zähigkeit und Temperaturleitfähigkeit als konstante Stoffwerte ansehen und die Wärmeerzeugung durch innere Reibung vernachlässigen. Die laminare Strömungsgrenzschicht wird dann von den Prandtlschen Grenzschichtgleichungen (Bewegungs- und Kontinuitätsgleichung) beschrieben, während man die zugehörige Temperaturgrenzschicht mit Hilfe der Energiegleichung berechnen kann. Die Grenzschichtgleichungen lassen sich für den Fall keilförmiger Körper, bei denen die Geschwindigkeit in der äußeren Potentialströmung nach einem Potenzgesetz von der Bogenlänge längs der Wand abhängt, streng lösen. In geeigneter dimensionsloser Darstellung erhält man zu jedem Keilkörper ein bestimmtes Grenzschichtgeschwindigkeitsprofil. Diese bereits von Falkner und Skan und Hartree berechneten Profile werden nochmals dargestellt. Entsprechend wird vom Verf. jetzt auch die Energiegleichung behandelt. Die zu den jeweiligen Geschwindigkeitsprofilen gehörigen Temperaturprofile werden für den Fall konstant vorgegebener Wandtemperatur berechnet. Aus dem Temperaturgradienten an der Wand ergibt sich die jeweilige Wärmeübergangszahl. Die so gewonnenen exakten Lösungen werden dann als Grundlage eines Näherungsverfahrens genommen, mit dessen Hilfe sich die Geschwindigkeits- und Temperaturgrenzschicht an beliebigen Körperformen berechnen läßt. Ausgehend von der bekannten Lösung im Staupunkt wird die Änderung der Grenzschicht unter der Annahme berechnet, daß das Anwachsen der Grenzschichtdicke an einer Stelle des gegebenen Körpers ebenso groß ist wie bei einem Keilkörper an der Stelle, wo die Grenzschichtdicke und das Geschwindigkeitsgefälle mit den entsprechenden Werten an dem gegebenen Körper übereinstimmen. Zur bequemen Lösung der dabei auftretenden Differentialgleichung sind einige Rechenblätter beigegeben. Gegenüber den bisher bekannten Rechnungsverfahren kommt Verf. mit einem sehr viel kleineren Zeitaufwand aus. Zum Schluß wird das Verfahren an einer Reihe von Beispielen erläutert und mit Messungen und den bisher bekannten strengen Lösungen und anderen Näherungsverfahren verglichen, wobei sich eine befriedigende Übereinstimmung ergibt.

Göttingen. W. Mangler. 464

Die Tätigkeit der Baltischen Geodätischen Kommission in den Jahren 1938—1941. Berichtet von dem Präsidium. 113 S. Helsinki 1942, Osakeyhtio Weilin & Göös, Aktiebolag.

Diese Veröffentlichung enthält außer einem allgemeinen Tätigkeitsbericht einen Landesbericht für Dänemark von N. E. Nörlund, einen Landesbericht für Finnland von J. Bonsdorff und einen Landesbericht für Schweden von G. A. Rune. In Dänemark wurden ein hydrostatisches Nivellement mit Hilfe eines mit Wasser gefüllten Bleirohrs, eine Breitenbestimmung der trigonometrischen Station Kopenhagen, Schwerebestimmungen mit einem dynamischen Schweremesser auf sechs Stationen und solche mit zwei verschiedenen statischen Schweremessern auf zahlreichen Stationen, vier Basismessungen sowie ein fast 10 000 km langes Feinnivellement ausgeführt. In Finnland wurden die Triangulation, die astronomischen Arbeiten, das Feinnivellement und die Ausgleichungsrechnungen fortgesetzt; ferner wurden verschiedene, auf die Invardrähte und die Basismessungen sich beziehende Untersuchungen ausgeführt. In Schweden wurden Triangulationen, Grundlinienmessungen, astronomische Messungen sowie Schwerkraftsbestimmungen durchgeführt.

Außer diesen Tätigkeitsberichten enthält die Veröffentlichung noch Mitteilungen von G. Nørgaard über „Un gravimètre nouveau et des mesures à l'îsle de Bornholm", B. Wideland über relative Schwerebestimmungen in Schweden im Jahre 1941, K. Rosén über zwei Sehnendreiecksformeln und den Satz von Legendre, V. R. Ölander über die Ausgleichung von unsymmetrisch angeordneten Richtungsbeobachtungen und I. Bonsdorff über zufällige und systematische Fehler bei den Winkelmessungen der Triangulation 1. Ordnung des Finnischen Geodätischen Instituts.

Stuttgart. P. Werkmeister. 440

Dr. K. **SCHWIDEFSKY**, wissenschaftl. Mitarbeiter d. Opt. Werke Zeiß, Jena, Einführung in die Luft- und Erdbildmessung. 3. erweiterte u. verbess. Aufl. VI + 176 S. m. 85 Abb., 3 schwarzen und 2 farbigen Tafeln im Text, 1 schwarzen Tafel, 1 farbigen Brille und 2 Stereobildern im Anhang. Leipzig und Berlin 1942, Verlag B. G. Teubner. Preis geb. 7,80 M.

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

Zur Näherungskonstruktion der logarithmischen Spirale.

Die in dieser Zeitschrift Bd. 22 (1942) S. 168 bis 169 veröffentlichte Kleine Mitteilung des Herrn H. Meincke, „Annäherung der logarithmischen Spirale durch Kreisbogen", ist eine nur geringfügig veränderte und erweiterte Wiedergabe einer unter Herrn Meinckes und meinem Namen veröffentlichten Arbeit „Eine Näherungskonstruktion für die logarithmische Spirale" (Deutsche Math. Bd. 3 (1938) S. 269 bis 272). Da ich für die Richtigkeit des Inhalts und der Formulierung dieser Arbeit die alleinige Verantwortung trage, da ferner Herr Meincke sie ohne Nennung meines Namens zitiert und schließlich in die Mitteilung Unklarheiten und Fehler hineinbringt, die in meiner Darstellung nicht vorhanden waren, fühle ich mich zu folgender Richtigstellung veranlaßt:

Es handelt sich um eine Näherungs*konstruktion* der logarithmischen Spirale, für die *Berechnung* der Koordinaten einzelner Punkte bringen die Näherungsformeln keinen praktischen Vorteil. Auch bei Berechnung von Bogenlänge und Flächeninhalt wird man kaum Näherungsformeln benutzen, da die durch Integration gewonnenen exakten Formeln

$$s = \frac{r - a}{\cos \tau}, \qquad F = \frac{r^2 - a^2}{4 \operatorname{ctg} \tau}$$

hinreichend einfach sind.

Falsch ist Formel (4) der Mitteilung; sie gilt bei kleinem Δ (s. Formel (8)) näherungsweise. Daher ist auch die Bemerkung im vorletzten Absatz unrichtig, daß die in der Deutschen Math. veröffentlichte Zahlentafel entbehrlich sei. Bei gegebenem τ und a bestimmt sich ω aus einer transzendenten Gleichung. Die Tafel soll dem Konstrukteur die Mühe der Auflösung ersparen. Sie zeigt ferner, daß man sich in allen praktischen Fällen auf die Werte $a = 15°$, $30°$, $45°$ und $60°$ beschränken kann. Ferner ist $\omega = \tau + \frac{a}{2}$ (vor Formel (5)) unrichtig; es muß $\omega = \pi - \frac{a}{2} - \tau - \Delta$ oder zumindest $\omega \approx \pi - \frac{a}{2} - \tau$ heißen. In (10) bis (15) der Mitteilung muß das Argument der Sinusfunktionen überall $a + \omega$ statt $\tau - \frac{a}{2}$ und ω statt $\tau + \frac{a}{2}$ heißen. Wenn diese Winkel auch bei kleinem Δ näherungsweise Supplementwinkel sind, so darf hier das Δ nicht vernachlässigt werden, da der Gegenstand des Beweises gerade die Güte der Annäherung ist. Die ohne Beweis mitgeteilte Grenzwertformel (6) ist nach Setzen von Klammern zwar richtig, ist aber nach dem Gesagten für Konstruktion und Rechnung ohne Bedeutung.

Berlin. Günther Schulz.

Diese Zuschrift wurde Herrn Meincke zugesandt.

W. 470

Berichtigung.

Bemerkung zu H. Görtler, **Berechnung von Aufgaben der freien Turbulenz auf Grund eines neuen Näherungsansatzes.** Z. angew. Math. Mech. Bd. 22 (1942) S. 244 bis 254.

Ich weise auf zwei Druckfehler hin, die leider nicht ausgemerzt wurden: 1. Seite 246, Zeile 19, ließ $F'(0) = 1$ statt $F'(0) = 0$; 2. Seite 250, *erste* Gleichung (2.7), rechte Seite, ließ $\sqrt{x/s}$ statt $\sqrt{s/x}$.

Bei dieser Gelegenheit möge folgende ergänzende Bemerkung zum ersten der durchgerechneten Beispiele (Vermischungszone zweier Strahlen) angefügt werden. Die Rechnung lieferte in den ausgeführten ersten vier Schritten der Iteration außerordentlich rasch klein werdende Korrekturen der Ausgangsnäherung im praktisch interessierenden ξ-Intervall (etwa $|\xi| \leq 2$) und führte damit zu der erstrebten guten Näherungslösung für die Vermischungszone. Zu der in der Arbeit nicht näher untersuchten Frage jedoch, ob sich die *exakte* Lösung in Gestalt der dort nur formal angeschriebenen *unendlichen* Reihe (1.9) für *alle* ξ in $-\infty \leq \xi \leq \infty$ wird darstellen lassen, ist folgende Warnung angebracht. Nach orientierenden Rechnungen, die Herr W. Mangler kürzlich durchführte, ist Konvergenz des Verfahrens in $|\xi| = \infty$ nicht wahrscheinlich. Das leuchtet auch ein, denn das Iterationsverfahren wird wohl bis auf einen gemeinsamen für $|\xi| \to \infty$ asymptotisch exponentiell verschwindenden Faktor aller Reihenglieder für sehr große $|\xi|$ im wesentlichen auf eine Entwicklung nach steigenden Potenzen von ξ führen, die dann natürlich in $|\xi| = \infty$ (wesentlich singuläre Stelle der Lösung) nicht konvergieren kann. Im übrigen kommt dieser Frage im Hinblick auf die schon am Rande des praktisch interessierenden ξ-Intervalls nicht mehr zutreffende physikalische Annahme der Theorie nur ein untergeordnetes Interesse zu.

Göttingen. H. Görtler. 454

Nachtrag zu der Kleinen Mitteilung: „Eine Schieberanordnung für die Schlüsselgleichung

$$f_1(\varphi(a) + \psi(\beta)) + f_2(\gamma) = f_3(a, \beta, \gamma),$$

wobei nur das Endresultat abzulesen ist." Z. angew. Math. Mech. Bd. 22 (1942) S. 169 bis 170.

In Ergänzung der obigen Mitteilung wird empfohlen, den Rechenstab mit der f_1-Kurve (Schieber 1) durch einen Kreisrechenschieber zu ersetzen, dessen äußerer Ring die f_1-Kurve als Rand hat. (Polarkoordinatendarstellung.) Dieser Kreisschieber wird je nach Verwendungszweck auf dem festen Teil oder auch auf der Zunge des Schiebers 2 befestigt. Gerechnet wird mit dieser Anordnung, wie s. Zt. für die zwei Stäbe beschrieben.

Durch Einführung des Kreisrechenschiebers ist die Anordnung wesentlich leichter und einfacher zu handhaben.

Böblingen. H. Schminke. 476

Für den Textteil verantwortlich: Prof. Dr. Fr. A. Willers, Dresden-A. 20, Dorotheenstr. 12. — Printed in Germany. — Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.